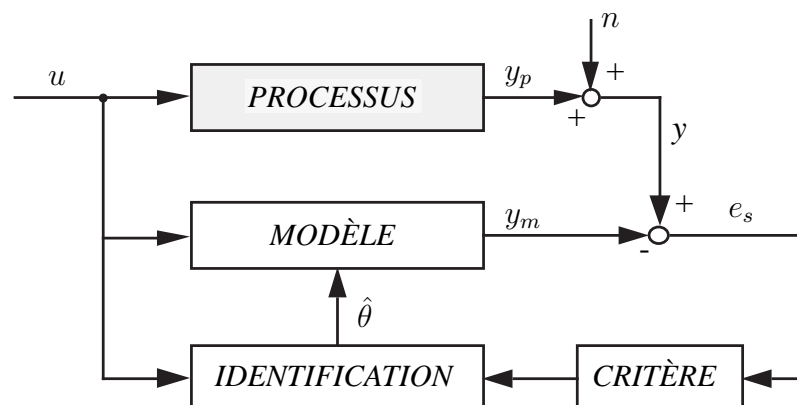


# IDENTIFICATION DE SYSTÈMES DYNAMIQUES

Prof. D. Bonvin, Dr. A. Karimi



Lausanne  
Septembre 2007



# PRÉFACE

Ce polycopié est prévu comme support écrit et complément au cours «Identification et Commande I» offert en option aux étudiants de 7-ème semestre de plusieurs sections de l'EPFL. Il ne remplace en aucun cas une participation active au cours.

Ce cours à une mission synthétique: celle d'unifier au travers d'exemples choisis et de démonstrations en simulation plusieurs notions rencontrées en physique, en mécanique, en traitement du signal et en automatique. La rigueur mathématique déductive a été omise chaque fois que cela était possible au profit d'une approche plus descriptive et inductive. La démarche mathématique restante est cependant indispensable à une étude quantitative des systèmes dynamiques.

L'étudiant trouvera tout au long de ce polycopié des questions (en italique dans le texte) lui permettant d'apporter un regard critique sur la matière traitée. De plus, une série d'exercices résolus permettant à l'étudiant de vérifier ses connaissances a été incluse à la fin de chaque chapitre. Une bibliographie ainsi que plusieurs séries d'exercices (non résolus) se trouvent à la fin du polycopié.

Ce polycopié ne représente qu'un premier effort d'offrir aux étudiants un support utile pour appréhender les nombreux problèmes de modélisation et d'identification qui les touchent. Plusieurs corrections ou améliorations seront encore nécessaires. Dans ce sens, les auteurs remercient d'avance les étudiants qui lui feront part de leurs remarques, comme ils remercient les assistants-étudiants ainsi que Anne et John Kumpli de *recto verso* et Gorka Galdos qui l'ont aidé dans la rédaction de la présente version de ce polycopié.

Lausanne, septembre 2007



# TABLE DES MATIÈRES

<b>PRÉFACE</b>	<b>iii</b>
<b>1 PROCESSUS, SYSTÈMES ET MODÈLES</b>	<b>1</b>
1.1 OBJECTIFS DE LA MODÉLISATION . . . . .	1
1.1.1 Procédure de modélisation . . . . .	1
1.1.2 Modélisation, analyse et simulation . . . . .	2
1.1.3 Exemple 1: Automobile . . . . .	3
1.1.4 Exemple 2: Réservoir pressurisé . . . . .	4
1.1.5 Exemple 3: Salon de coiffure . . . . .	6
1.2 TYPOLOGIE DES MODÈLES . . . . .	7
1.2.1 Typologie selon le but du modèle . . . . .	7
1.2.2 Typologie selon la nature du système . . . . .	9
1.2.3 Typologie selon les propriétés du modèle . . . . .	11
1.3 MÉTHODES DE REPRÉSENTATION . . . . .	13
1.3.1 Représentation temporelle externe . . . . .	14
1.3.2 Représentation temporelle interne . . . . .	18
1.3.3 Représentation fréquentielle externe . . . . .	24
1.3.4 Représentation fréquentielle interne . . . . .	30
1.3.5 Comparaison des différentes méthodes de représentation . . . . .	31
1.4 EXEMPLES . . . . .	33
1.4.1 Cuve agitée . . . . .	33
1.4.2 Système de production . . . . .	34
1.5 EXERCICES RÉSOLUS . . . . .	35
<b>2 MODÈLES DE REPRÉSENTATION NON PARAMÉTRIQUES</b>	<b>47</b>
2.1 INTRODUCTION . . . . .	47
2.2 RÉPONSES INDICIELLE ET IMPULSIONNELLE . . . . .	48

2.2.1	Relevé graphique . . . . .	48
2.2.2	Déconvolution numérique . . . . .	49
2.3	MÉTHODE DE CORRÉLATION . . . . .	51
2.3.1	Principe . . . . .	51
2.3.2	Fonctions de corrélation pour les signaux déterministes . . . . .	52
2.3.3	Fonctions de corrélation pour les signaux aléatoires . . . . .	55
2.3.4	Relation entre $\mathbf{R}_{uv}(\mathbf{h})$ , $\mathbf{R}_{vy}(\mathbf{h})$ et $\mathbf{g}(\mathbf{h})$ . . . . .	59
2.3.5	Calcul de la réponse impulsionnelle . . . . .	60
2.3.6	Excitation pseudo-aléatoire . . . . .	63
2.4	MÉTHODES FRÉQUENTIELLES . . . . .	65
2.4.1	Analyse harmonique . . . . .	66
2.4.2	Analyse par transformation de Fourier . . . . .	68
2.4.3	Analyse spectrale . . . . .	75
2.5	IDENTIFICATION EN BOUCLE FERMÉE . . . . .	81
2.6	FONCTION DE TRANSFERT À PARTIR D'UN MODÈLE NON PARAMÉTRIQUE . . . . .	83
2.6.1	Fonction de transfert du premier ordre à partir de la réponse indicielle ou impulsionnelle . . . . .	83
2.6.2	Fonction de transfert du deuxième ordre à partir de la réponse indicielle . . . . .	85
2.6.3	Fonction de transfert d'ordre quelconque à partir de la réponse impulsionnelle . . . . .	87
2.6.4	Fonction de transfert à partir de la réponse harmonique . . . . .	88
2.7	COMPARAISON DES MÉTHODES NON PARAMÉTRIQUES . . . . .	91
2.8	EXERCICES RÉSOLUS . . . . .	92
<b>3</b>	<b>MODÈLES DE REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUES</b> . . . . .	<b>101</b>
3.1	INTRODUCTION . . . . .	101
3.2	MODÈLE DU PROCESSUS . . . . .	105
3.3	CRITÈRES DE PERFORMANCE . . . . .	106
3.3.1	Critère basé sur l'erreur de sortie . . . . .	106
3.3.2	Critère basé sur l'erreur d'équation . . . . .	107
3.3.3	Critère basé sur l'erreur de prédiction . . . . .	108
3.3.4	Quel critère choisir? . . . . .	109
3.4	ALGORITHME DES MOINDRES CARRÉS . . . . .	109
3.4.1	Formulation récurrente des moindres carrés . . . . .	111

3.4.2	Moindres carrés pondérés . . . . .	113
3.4.3	Erreur et variance d'estimation . . . . .	117
3.4.4	Méthode des variables instrumentales . . . . .	119
3.5	MÉTHODE DE L'ERREUR DE PRÉDICTION . . . . .	121
3.5.1	Structures sans modèle du bruit . . . . .	121
3.5.2	Structures avec modèle du bruit . . . . .	124
3.5.3	Minimisation de l'erreur de prédiction . . . . .	129
3.5.4	Analyse fréquentielle de l'erreur de prédiction . . . . .	132
3.6	IDENTIFICATION EN BOUCLE FERMÉE . . . . .	134
3.6.1	Identification sans excitation externe . . . . .	135
3.6.2	Identification avec excitation externe . . . . .	135
3.7	ASPECTS PRATIQUES DE L'IDENTIFICATION . . . . .	137
3.7.1	Conditionnement des signaux . . . . .	138
3.7.2	Choix de la période d'échantillonnage . . . . .	142
3.7.3	Choix du signal d'excitation . . . . .	143
3.7.4	Estimation de l'ordre . . . . .	146
3.8	VALIDATION DU MODÈLE . . . . .	149
3.8.1	Validation par rapport au but escompté . . . . .	149
3.8.2	Validation du modèle avec des données expérimentales . . . . .	149
3.8.3	Validation par des méthodes statistiques . . . . .	150
3.8.4	Validation par des méthodes heuristiques . . . . .	152
3.9	PROCÉDURE D'IDENTIFICATION PARAMÉTRIQUE . . . . .	153
3.10	EXERCICES RÉSOLUS . . . . .	154
<b>A</b>	<b>TRANSFORMATION DE FOURIER</b> . . . . .	<b>167</b>
A.1	SÉRIE DE FOURIER POUR SIGNAUX ANALOGIQUES PÉRIODIQUES . . . . .	167
A.1.1	Exemple . . . . .	167
A.2	TRANSFORMATION DE FOURIER POUR SIGNAUX ANALOGIQUES APÉRIODIQUES . . . . .	169
A.2.1	Remarque . . . . .	169
A.2.2	Exemple . . . . .	169
A.3	SÉRIE DE FOURIER POUR SIGNAUX NUMÉRIQUES PÉRIODIQUES . . . . .	173
A.3.1	Exemple . . . . .	173

---

A.4	TRANSFORMATION DE FOURIER POUR SIGNAUX NUMÉRIQUES APÉRIODIQUES . . . . .	174
A.4.1	Exemple . . . . .	174
A.5	SPECTRE D'UN SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ . . . . .	175
A.6	TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRÈTE . . . . .	177
A.6.1	Remarque . . . . .	178
A.6.2	Exemples . . . . .	179
A.7	TRANSFORMATION DE FOURIER RAPIDE (FFT) . . . . .	184
<b>B</b>	<b>MATRICE PSEUDO-INVERSE</b>	<b>187</b>
B.1	DÉFINITIONS . . . . .	187
B.2	PROPRIÉTÉS . . . . .	188
B.3	RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES LINÉAIRES . . . . .	188
B.4	CALCUL DE LA MATRICE PSEUDO-INVERSE PAR SVD . . . . .	189
<b>C</b>	<b>TRANSFORMATIONS DE LAPLACE ET EN Z</b>	<b>191</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>195</b>



# Chapitre 1

## PROCESSUS, SYSTÈMES ET MODÈLES

### 1.1 OBJECTIFS DE LA MODÉLISATION

#### 1.1.1 Procédure de modélisation

La variable indépendante *temps* joue un rôle prépondérant dans l'étude des systèmes *dynamiques*. Une telle étude nécessite souvent une modélisation, c'est-à-dire la représentation du système par un modèle mathématique. A ces fins, il est nécessaire de procéder par étapes et de bien distinguer les quatre entités suivantes: processus, système, modèle mathématique et modèle informatique.

- Le **processus** constitue la réalité physique que l'on désire étudier. Par exemple:
  - la navette spatiale,
  - le comportement écologique d'une région,
  - un atelier de production flexible.
- Ces réalités physiques sont souvent très complexes. Il est alors nécessaire de simplifier ou de limiter le cadre de l'étude en définissant le **système** à étudier. Celui-ci ne comportera que les éléments indispensables à l'étude souhaitée. Il y a donc un fort élément d'*abstraction* en passant du processus au système à étudier.
- Une fois le système défini, on essayera de le représenter par des équations algébriques ou différentielles qui constitueront le **modèle mathématique**. Ceci implique un effort de *simplification*.
- Le modèle mathématique sera ensuite étudié analytiquement (dans les cas simples) ou par simulation (le plus souvent). Dans ce cas, il s'agira de coder le modèle mathématique pour l'implanter sur ordinateur. On parle alors de **modèle informatique**.

Une fois le modèle construit et implanté, on doit s'assurer que les résultats de simulation qu'il produit correspondent bien à la réalité du système à étudier. Les démarches de vérification et de validation explicitées ci-dessous doivent être effectuées

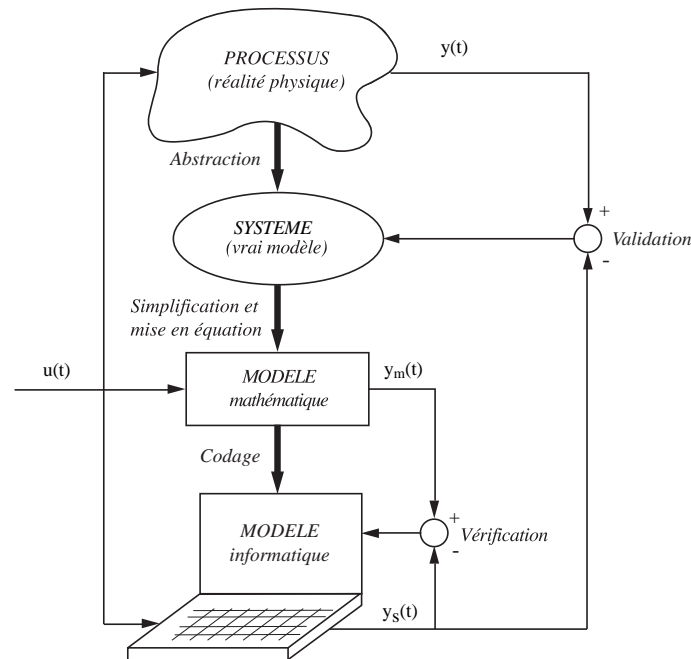


FIG. 1.1 – Procédure de modélisation: différentes entités et étapes.

en parallèle avec le développement et l’implantation du modèle. Elles sont essentielles afin d’assurer la crédibilité de l’approche de simulation. Un modèle auquel on ne fait pas confiance ne sera pas utilisé!

La *vérification* consiste à comparer l’implantation sur ordinateur de la simulation avec le modèle sous-jacent. L’implantation fait-elle bien ce que l’on a voulu faire avec le modèle? Il s’agit donc ici d’une étape de déverminage.

La *validation*, pour sa part, traite de la comparaison des résultats de simulation avec la réalité, cette dernière pouvant encore être plus large que celle considérée par le modélisateur. Le système a-t-il été correctement cerné, modélisé et simulé? Un modèle de simulation est donc valide s’il peut représenter avec suffisamment de précision la réalité physique pour une classe d’expériences et dans un domaine particulier. Le schéma de la figure 1.1 indique les étapes nécessaires à la modélisation et simulation d’un processus sur ordinateur. Les démarches de vérification et de validation y sont clairement représentées. On remarque que les étapes doivent souvent être répétées jusqu’à la validation complète du modèle et de la simulation. L’approche est donc de nature *itérative*.

### 1.1.2 Modélisation, analyse et simulation

Nous appelons **modélisation** l’ensemble des étapes nécessaires à l’élaboration d’un modèle mathématique ou informatique propre à représenter un processus dans une situation donnée. Un modèle mathématique peut s’élaborer à partir des lois physiques régissant le système étudié. Un tel modèle est appelé *modèle de connaissance*, *modèle physique* ou encore *modèle de simulation*.

Il est également possible de calculer un modèle à partir de la connaissance des entrées et des sorties correspondantes du système. Un tel modèle est alors appelé *modèle de représentation*, *modèle expérimental* ou encore *modèle de commande*. On dénote cette étape de modélisation par **identification**.

L'**analyse** du modèle comprend l'étude de propriétés telles que la stabilité, l'observabilité et la gouvernabilité du système, ou encore l'identifiabilité des paramètres.

La **simulation** représente l'étude du comportement d'un processus (physique, abstrait ou hypothétique) par l'étude du comportement d'un modèle informatique de ce processus.

### 1.1.3 Exemple 1: Automobile

L'automobile, avec tous ses constituants, représente la réalité physique ou processus. L'état de la route, le trafic qui s'y trouve et les éventuelles perturbations (vent, pluie, etc.) constituent l'environnement du processus. Le système à étudier dépend du cadre de l'étude. On considère ci-dessous deux études bien différentes du même processus «automobile».

#### Etude «trajectoire»:

Dans le but de décrire la trajectoire de l'automobile sur une route (système à étudier), on ne s'intéresse directement ni aux mouvements des pistons, ni aux différents engrenages, ni à la pression des pneus, mais plutôt aux différentes forces qui agissent sur l'automobile. Le système ainsi défini est représenté à la figure 1.2.

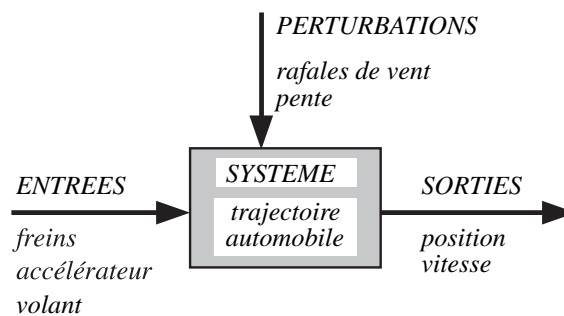


FIG. 1.2 – Système «trajectoire automobile » avec les entrées, sorties et perturbations.

On peut décrire la trajectoire de l'automobile en utilisant la loi de mouvement de Newton:

$$m\ddot{x} = \sum_i F_i$$

où  $m$  représente la masse de la voiture,  $x$  sa position et  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) les différentes forces qui agissent sur l'automobile. Le modèle mathématique comprend des variables indépendantes (les entrées et les perturbations: les différentes forces exté-

rieures) et des variables dépendantes (les sorties: la position et la vitesse) comme cela est illustré à la figure 1.3.

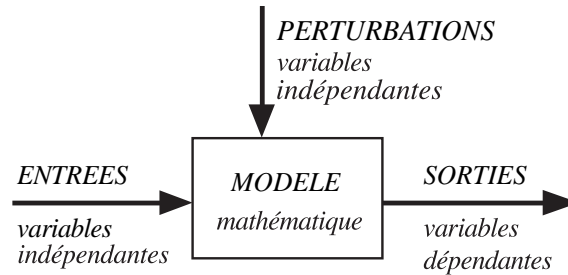


FIG. 1.3 – Modèle mathématique avec les variables indépendantes et dépendantes.

### Etude «cylindre»:

Si l'objectif est plutôt de décrire le comportement thermique du moteur, on limitera l'étude à un seul cylindre pour considérer les problèmes de combustion et de transfert de chaleur. On obtiendra alors le système de la figure 1.4.

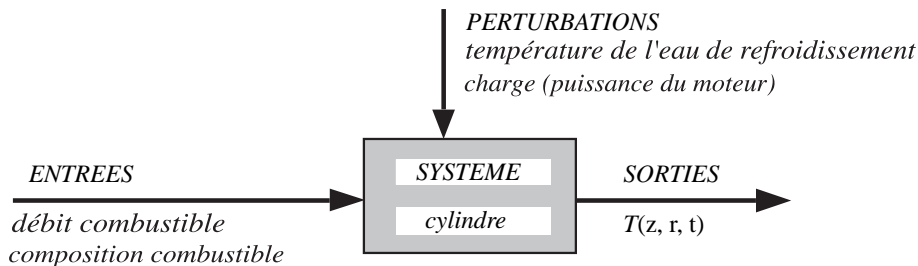


FIG. 1.4 – Système «cylindre» avec les entrées, sorties et perturbations.

Un bilan thermique permet de décrire les variations spatiales et temporelles de la température dans le cylindre en fonction de variables telles que le débit et la composition du combustible, la température et le débit de l'eau de refroidissement ou encore la puissance demandée au moteur. Le modèle mathématique liera les variables indépendantes et dépendantes comme indiqué à la figure 1.3.

#### 1.1.4 Exemple 2: Réservoir pressurisé

**Processus:** réservoir cylindrique contenant un liquide et un gaz avec des débits d'alimentation et de fuite pour le liquide et le gaz (fig. 1.5). On définit les grandeurs suivantes:

- q: débit volumique [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]
- p: pression [Pa]
- H: hauteur du réservoir [m]
- h: niveau du liquide [m]
- S: surface de section [ $\text{m}^2$ ]

**Système:** dans le cas d'une étude de commande, plusieurs possibilités existent.

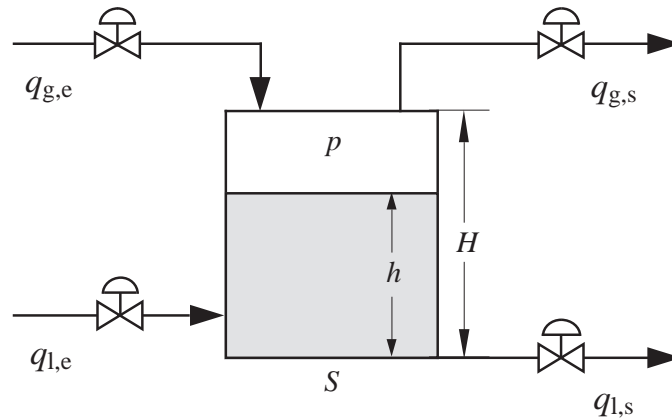


FIG. 1.5 – Réservoir pressurisé.

1. Pour une commande de niveau (fig. 1.6):

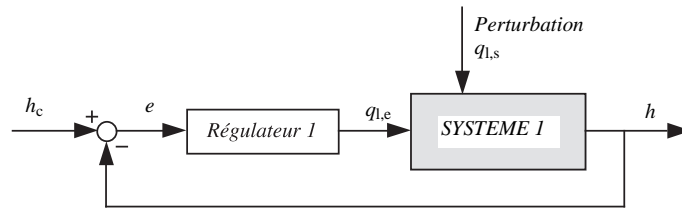


FIG. 1.6 – Schéma fonctionnel d'une commande de niveau.

2. Pour une commande de pression (fig. 1.7):

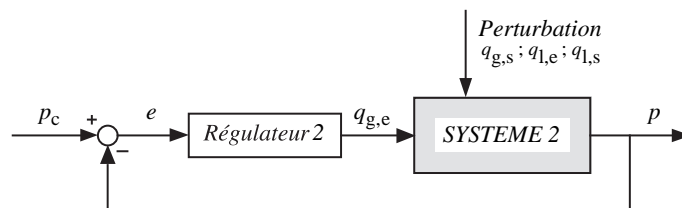


FIG. 1.7 – Schéma fonctionnel d'une commande de pression.

3. Pour une commande de niveau et pression:

Ce cas d'étude considère un système multivariable, c'est-à-dire avec plus d'une entrée ou plus d'une sortie. Il convient alors d'utiliser une approche de commande multiboucle (fig. 1.8) ou de commande multivariable (fig. 1.9).

Les variables  $u$  et  $y$  représentent les vecteurs d'entrée et de sortie:

$$u = \begin{bmatrix} q_{l,e} \\ q_{g,e} \end{bmatrix} ; \quad y = \begin{bmatrix} h \\ p \end{bmatrix}$$

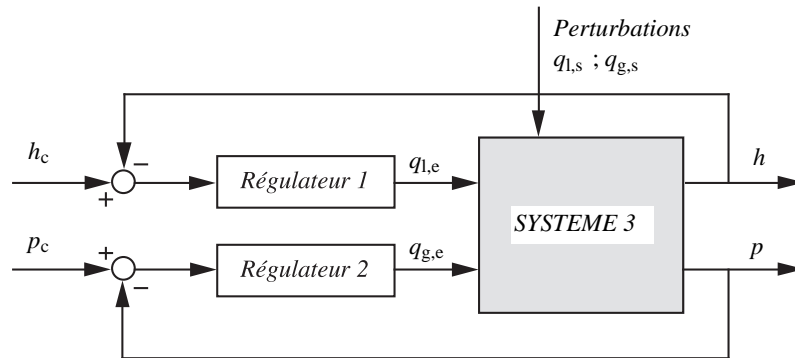


FIG. 1.8 – Schéma fonctionnel d'une commande multiboucle de niveau et pression.

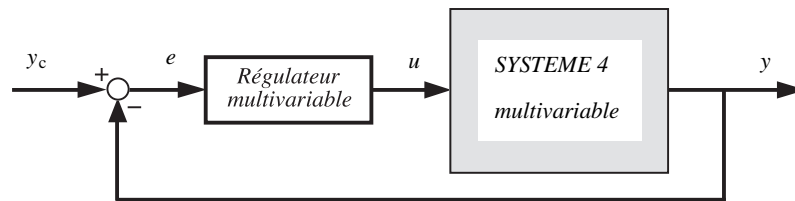


FIG. 1.9 – Schéma fonctionnel d'une commande multivariable de niveau et pression.

*Quelle est la différence principale entre les approches de commande multiboucle et multivariable? Peut-on ramener une approche multivariable à une approche multiboucle?*

**Modèle:** le modèle résulte de deux bilans massiques (pour le liquide et le gaz) à l'intérieur du réservoir:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= \frac{1}{S}(q_{1,e} - q_{1,s}) \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{p}{S(H-h)}[(q_{1,e} - q_{1,s}) + (q_{g,e} - q_{g,s})]\end{aligned}$$

Le modèle approprié à chaque cas de commande s'exprime à partir de l'une ou des deux équations ci-dessus.

### 1.1.5 Exemple 3: Salon de coiffure

**Processus:** salon Géraldine, 17 rue des Aubépines, avec son infrastructure et environnement.

**Système:** le fonctionnement du salon de coiffure pendant 8 h (fig. 1.10).

**Modèle:** il s'établit à partir du système défini ci-dessus et des règles (simplifications) suivantes:

- un client qui ne trouve pas de chaise d'attente libre s'en va chez la concurrence,
- le temps entre l'arrivée des clients suit une distribution exponentielle avec une valeur moyenne de 20 min,

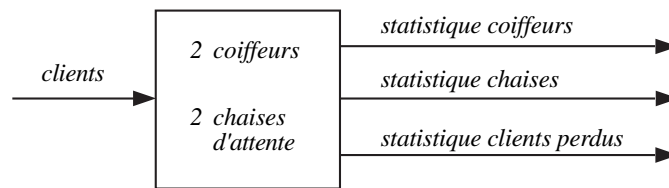


FIG. 1.10 – Système «salon de coiffure».

- la durée de service d'un client suit une distribution normale avec une valeur moyenne de 40 min et un écart-type de 10 min.

Un tel système est appelé un **système dynamique à événements discrets**, car les événements (arrivée des clients, fin de service d'un client) arrivent à des temps discrets non réguliers. Ce système est représentatif du fonctionnement d'un système de service ou d'un système de production tel un atelier flexible.

## 1.2 TYPOLOGIE DES MODÈLES

Comme les processus peuvent être de natures fort diverses, les modèles utilisés doivent refléter au mieux cette diversité. On distingue donc plusieurs types de modèles, que l'on classe ici selon différents critères.

### 1.2.1 Typologie selon le but du modèle

On développe des modèles pour:

**La simulation**, c'est-à-dire l'évaluation de la performance d'un processus projeté ou existant par l'intermédiaire de son modèle informatique. Pour ce faire, on utilise le plus souvent des *modèles de connaissance* (appelés aussi modèles physiques ou modèles de simulation).

Exemples:

- étude thermique concernant la rentrée dans l'atmosphère de la navette spatiale Hermes,
- analyse de performance d'un système de service (salon de coiffure, banque, etc.).

**La conception**, c'est-à-dire le dimensionnement d'un processus à partir des caractéristiques de ses composants et des performances désirées. Ici aussi, on utilise le plus souvent des *modèles de connaissance*.

Exemples:

- dimensionnement d'une installation électrique, mécanique ou chimique,
- décisions liées à la modernisation d'une installation de production.

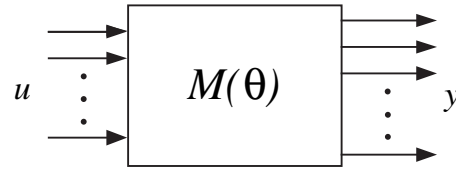


FIG. 1.11 – Modèle multivariable.

TAB. 1.1 – Types de problèmes faisant intervenir un modèle mathématique.

Problème	Type	Donnés	Cherché	Modèle
simulation	direct	$u, M(\theta)$	$y$	connaissance
conception	inverse	$u, y_{\text{désiré}}$	$M(\theta)$	connaissance
identification	inverse	$u, y_{\text{mesuré}}$	$M(\theta)$	représentation
commande	inverse	$M(\theta), y_{\text{désiré}}$	$u$	représentation

**L'identification**, c'est-à-dire la modélisation d'un processus sur la base d'observations du comportement temporel des entrées et sorties d'un processus. Comme ces *modèles de représentation* sont élaborés à partir de mesures expérimentales et servent souvent à la commande du processus, ils sont aussi appelés modèles expérimentaux ou modèles de commande.

Exemples:

- identification de certains facteurs économiques,
- identification du comportement dynamique d'un robot.

**La commande**, c'est-à-dire le calcul de signaux de commande de façon à ce qu'un processus suive au mieux ses grandeurs de consigne, même en présence de perturbations. Dans ce but, on utilise le plus souvent des *modèles de représentation*.

Exemples:

- calcul de la tension à appliquer à un moteur pour une commande de vitesse ou de position,
- calcul du débit d'alimentation dans le cas d'une commande de niveau.

Ces quatre types de problèmes sont représentés au tableau 1.1 pour le modèle représenté schématiquement à la figure 1.11 en utilisant les notations suivantes:

$u$ : vecteur d'entrée

$y$ : vecteur de sortie

$\theta$ : vecteur des paramètres

Un problème est qualifié de type «direct» s'il est possible de calculer directement (en un seul pas de calcul, et donc sans itération) les grandeurs cherchées à partir des grandeurs données. Dans le cas contraire, le problème est de type «inverse» et sa résolution nécessite une démarche itérative.



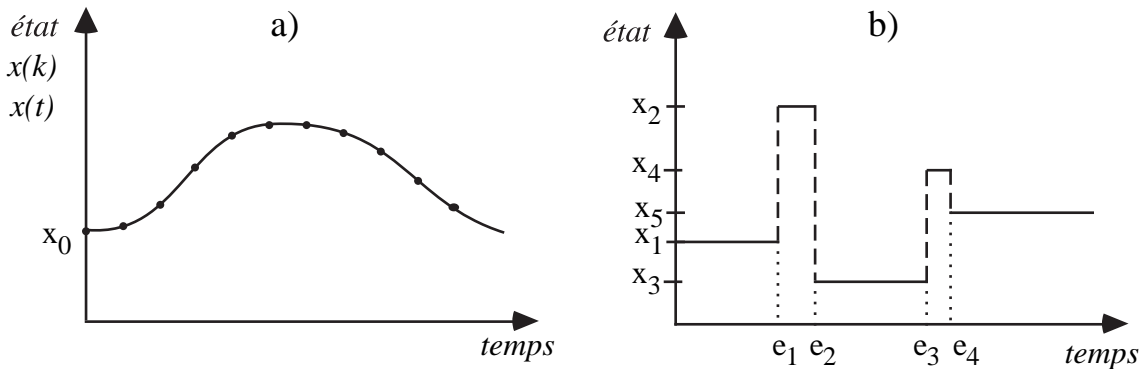


FIG. 1.12 – Evolution de l'état pour un système dynamique : (a) évolution continue, (b) événements discrets.

## 1.2.2 Typologie selon la nature du système

On distingue ici les **systèmes dynamiques à évolution continue** (l'état du système exprimé par les variables indépendantes évolue de façon continue, même s'il est observé de façon échantillonnée) des **systèmes dynamiques à événements discrets** (l'état du système ne change qu'à l'apparition d'événements, lesquels arrivent de façon discontinue et irrégulière).

### 1.2.2.1 Systèmes dynamiques à évolution continue

- Les systèmes dynamiques à évolution continue sont en général décrits par des équations différentielles ou aux différences ou par des fonctions de transfert.
- L'état du système évolue de façon continue. Par exemple, un avion qui veut passer de l'altitude  $h_1$  à l'altitude  $h_2$  doit nécessairement franchir toutes les positions intermédiaires (fig. 1.12(a)).
- Le temps est soit continu, soit discret avec une période d'échantillonnage  $T$  (les instants d'échantillonnage ne sont pas arbitraires mais bien réguliers).
- Les systèmes à évolution continue obéissent souvent à des **lois physiques** comme les lois de mouvement ou de conservation.

### 1.2.2.2 Systèmes dynamiques à événements discrets

- L'état d'un système à événements discrets n'évolue pas de façon continue mais change instantanément à certains instants (en général non réguliers) en réponse à un événement particulier (un événement discret), comme cela est illustré à la figure 1.12(b).
- La notion de temps est remplacée par celle de *séquence d'événements* (ou également par celle du temps auquel ces événements arrivent).
- Il existe souvent un *parallélisme* entre certaines activités ce qui nécessite un effort de *synchronisation*. En effet, plusieurs activités peuvent avoir lieu en même temps. Ou encore, une activité ne peut commencer que lorsque les éléments

nécessaires (entités) deviennent disponibles.

- La plupart des systèmes à événements discrets ont un caractère *stochastique* au sens où les événements ne suivent pas une séquence déterministe. Par exemple, le temps entre les arrivées successives de deux clients ou le temps de service d'un client représente une variable aléatoire.
- Il n'existe pas de *formalisme mathématique* permettant de représenter les systèmes à événements discrets de façon compacte et générale qui soit utilisable pour une étude analytique (comme cela est le cas pour les équations différentielles ou aux différences avec les systèmes dynamiques à évolution continue). Le modèle est donné par une collection d'entités (clients ou ressources) avec leurs attributs correspondants, d'événements et d'activités (services ou attentes). Des variables logiques représentent les débuts et fins d'activité, les actions tout-ou-rien, etc. Souvent, une étude est uniquement possible à l'aide de la simulation, c'est-à-dire en représentant, pas à pas, le comportement temporel du système.
- L'analyse rigoureuse de propriétés importantes telles que la stabilité d'un système ou l'accessibilité d'un état n'est, en général, pas possible. On se contente souvent de résultats de *simulation* d'où l'importance de cette dernière pour ce type de systèmes.
- On retrouve les systèmes dynamiques à événements discrets surtout dans certains *systèmes dynamiques interactifs modernes créés par l'homme* (systèmes de production, systèmes d'assemblage, réseaux d'ordinateurs et de communication, systèmes de service et de trafic, etc.) Les systèmes à événements discrets possèdent souvent une structure modulaire et hiérarchique.

#### Remarques:

- La distinction entre un système à évolution continue et un système à événements discrets est quelquefois arbitraire. Dans certains cas, on peut représenter un système à événements discrets par un modèle à évolution continue. Par exemple, le trafic routier sur une autoroute représente un système dynamique à événements discrets, avec les entités «automobiles» qui entrent et sortent d'un tronçon d'autoroute à des instants précis. On peut cependant représenter le flot automobile par un modèle agrégé décrit par des équations différentielles.
- Beaucoup de systèmes englobent des éléments discrets et des éléments continus. On parle alors de **systèmes hybrides**. Par exemple, un compte bancaire possède les éléments suivants:
  - solde avec intérêt composé: partie continue,
  - dépôts et retraits: partie discrète.
- Le cadre mathématique approprié à l'étude des systèmes dynamiques à évolution continue (c'est-à-dire les équations différentielles ou aux différences, les fonctions de transfert) existait bien avant l'avènement de l'ordinateur. Pour les systèmes dynamiques à événements discrets, par contre, c'est l'ordinateur qui a rendu leur étude possible grâce à la simulation. Il n'existe que peu de formalismes de représentation qui soient utiles pour l'analyse de propriétés et la synthèse de régulateurs pour ce type de systèmes.

- Ce cours considère uniquement la modélisation et l'identification de *systèmes dynamiques à évolution continue*. De ce fait, et afin de simplifier la nomenclature, on appellera ces systèmes tout simplement «systèmes dynamiques», la distinction continu/discret étant alors réservée à la façon de considérer le temps (temps continu/temps discret). Un **système dynamique continu** signifiera donc un système dynamique à évolution continue et à temps continu, alors qu'un **système dynamique discret** correspondra à un système dynamique à évolution continue et à temps discret.

### 1.2.3 Typologie selon les propriétés du modèle

- a) **Dynamique/statique:** Un modèle est **dynamique** si son état à un instant donné dépend non seulement de l'entrée présente mais aussi des entrées passées. On dit qu'un modèle dynamique possède de la mémoire ou de l'inertie. Il contient une ou plusieurs *équations différentielles*. Par opposition, la réponse d'un modèle **statique** à une entrée est instantanée. La relation entrée-sortie est alors donnée par une ou plusieurs *équations algébriques*.
- b) **Monovarié/multivarié:** Un modèle qui possède une seule entrée et une seule sortie est dit **monovarié**. Dans le cas contraire, on parle d'un modèle **multivarié**.
- c) **Déterministe/stochastique:** Un modèle est **déterministe** si les sorties futures peuvent être complètement déterminées à partir de l'état actuel et des entrées futures. Dans un modèle **stochastique**, le hasard joue un rôle important et on peut tout au plus associer une probabilité aux sorties du modèle.
- d) **A paramètres localisés/répartis:** Un modèle dynamique à **paramètres localisés** est généralement décrit par des *équations différentielles ordinaires* indiquant une dépendance temporelle. Si le modèle dynamique est décrit par des *équations aux dérivées partielles* avec une dépendance temporelle et une ou plusieurs dépendances spatiales, il est dit à **paramètres répartis**.
- e) **Continu/discret:** Un modèle est **continu** si ses variables temporelles (entrées, état, sorties) sont définies pour tout temps  $t$ . Il est **discret** si celles-ci ne sont définies qu'en des instants particuliers, par exemple à des instants d'échantillonnage.
- f) **Linéaire/non linéaire:** Un modèle est **linéaire** s'il obéit au principe de superposition défini par les propriétés d'additivité et d'homogénéité. Considérons le modèle  $M$  de la figure 1.13 avec des conditions initiales nulles (système initialement au repos). Le modèle  $M$  est linéaire si et seulement si:

$$M : \left. \begin{array}{l} u_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ u_2(t) \rightarrow y_2(t) \\ \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 : \text{ constantes réelles} \end{array} \right\} \Rightarrow M : \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \rightarrow \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

c'est-à-dire si et seulement si les conditions

- d'additivité  $u_1(t) + u_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$
- et d'homogénéité  $\alpha u(t) \rightarrow \alpha y(t)$



FIG. 1.13 – Modèle monovariable.

et donc le principe de superposition sont valables.

- g) **Stationnaire/non stationnaire:** Un modèle dont la structure et les paramètres (et non pas les entrées et sorties!) ne varient pas avec le temps est appelé **stationnaire**. On dit aussi qu'un système stationnaire ne vieillit pas. Il se comportera plus tard de la même façon que maintenant. Dans le cas contraire, on parle d'un système **non stationnaire** (ou évolutif).
- h) **Causal/anti-causal:** Un modèle **causal** est un modèle dont la réponse ne précède pas la variation de l'entrée. Tous les systèmes physiques réels sont nécessairement causals, l'effet ne pouvant pas précéder la cause.
- i) **Au repos/chargé:** Un modèle dynamique est **au repos** à un instant donné s'il est relâché, c'est-à-dire qu'il ne subit pas l'influence d'une entrée passée. Dans cet état, et en l'absence d'excitation extérieure, le système n'évolue pas. Ses mémoires sont vides. Dans le cas contraire, on dit que le système est **chargé**. Si un modèle dynamique est initialement au repos, ses conditions initiales seront nulles (en variables écart). On dit aussi qu'un tel modèle est initialement à l'état stationnaire.

Il est utile de noter les différences qui existent entre un modèle *stationnaire*, un modèle à l'état stationnaire (ou au repos) et un modèle *statique*:

$$\frac{dM}{dt} = 0; \quad \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \text{modèle stationnaire}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{état stationnaire (point d'équilibre)}$$

$$y(t) = f[u(t)] \quad \text{modèle statique (pas de mémoire)}$$

La nomenclature pour ces propriétés peut parfois prêter à confusion. On la résume ici:

Français	Allemand	Anglais
stationnaire	zeitinvariant	time-invariant
à l'état stationnaire (au repos)	im stationärem Zustand	at steady state
statique	statisch	static

Dans ce cours, nous étudierons principalement des systèmes dynamiques, continus ou discrets, mono ou multivariables, déterministes, à paramètres localisés, li-

Systeme	Représentation par une équation
dynamique à temps continu à temps discret à paramètres localisés linéaire stationnaire initialement au repos	différentielle aux différences ordinaire linéaire à coefficients constants conditions initiales nulles

FIG. 1.14 – Correspondance entre les propriétés d'un système et son modèle mathématique.

néaires, stationnaires, causals et initialement au repos. On pourra alors les représenter par des équations différentielles ordinaires ou des équations aux différences, linéaires, à coefficients constants et avec des conditions initiales nulles (fig. 1.14).

Un système qui possède les quatre propriétés de linéarité, stationnarité, causalité et d'être initialement au repos est appelé un **système lscr**.

### 1.3 MÉTHODES DE REPRÉSENTATION

Il existe plusieurs représentations possibles pour un système dynamique (à temps continu ou à temps discret). Ces représentations, qui peuvent être équivalentes ou complémentaires, se laissent classifier selon les trois critères suivants:

- représentation externe/interne,
- représentation temporelle/fréquentielle,
- représentation continue/discrète.

Une approche externe (modèle de représentation) met en relation directe les variables d'entrée et de sortie, alors qu'une représentation interne (modèle de connaissance) fait intervenir explicitement toutes les variables dynamiques du système.

Une approche temporelle est intéressante pour les raisons suivantes:

- les données expérimentales sont généralement disponibles sous forme temporelle,
- l'approche est intuitive, la notion de constante de temps est immédiate,
- une représentation temporelle interne est applicable:
  - aux systèmes linéaires et non linéaires, stationnaires et non stationnaires, avec des conditions initiales nulles et non nulles,
  - à l'identification, l'analyse, la simulation et l'optimisation du système.

Une représentation continue est souvent plus naturelle pour l'étape d'analyse, alors qu'une représentation discrète est nécessaire pour le travail sur ordinateur.

Ces classifications vont être explicitées dans les paragraphes qui suivent.

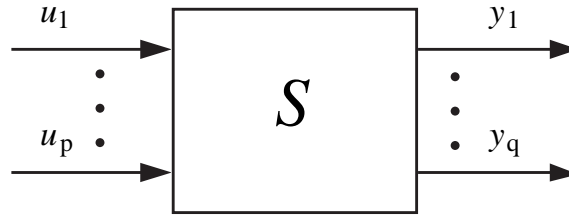


FIG. 1.15 – Système multivariable.

### 1.3.1 Représentation temporelle externe

#### 1.3.1.1 Systèmes dynamiques continus

Le système est décrit par la relation qui lie les entrées et les sorties du système (représentation externe). Cette relation entre les  $p$  entrées et les  $q$  sorties du système (fig. 1.15) est explicitée par le modèle suivant:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= h_1[u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_p(\tau), \tau] \\ &\vdots \\ y_q(t) &= h_q[u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_p(\tau), \tau] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} -\infty < \tau < \infty & \text{ pour un système dynamique, en général} \\ -\infty < \tau < t & \text{ pour un système dynamique causal,} \\ \tau = t & \text{ pour un système statique.} \end{aligned}$$

Afin d'étudier certaines propriétés de ce modèle, on introduit la notation ci-dessous. On choisit, sans perte de généralité, de représenter un système monovariable.

- a) Notation:**  $y = Hu$  où  $H$  : opérateur (application, fonction) spécifie de façon univoque la sortie  $y$  en termes de l'entrée  $u$  (passée, présente et, le cas échéant, également future). Pour représenter l'intervalle temporel  $[t_0, t_1]$  associé au signal  $u(t)$ , on utilise la notation  $u_{[t_0, t_1]}$ .
- b) Linéarité:** En utilisant la notation précédente, un système est linéaire si et seulement si:

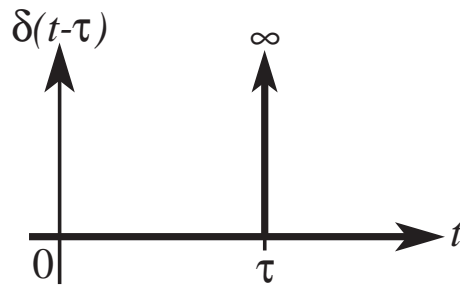
$$H(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 H u_1 + \alpha_2 H u_2$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  représentent des constantes réelles.

- c) Intégrale de convolution:** Considérons l'impulsion de Dirac  $\delta(t - \tau)$  représentée à la figure 1.16 et une fonction temporelle  $f(t)$  continue. On peut écrire:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau)$$

Avec le formalisme de l'impulsion de Dirac, l'entrée  $u(t)$  et la sortie  $y(t)$  de-

FIG. 1.16 – Impulsion de Dirac au temps  $\tau$ .

viennent:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

$$y(t) = Hu(t) = H \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} H\delta(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

En définissant  $g(t, \tau)$  comme la réponse du système au temps  $t$  à une impulsion de Dirac au temps  $\tau$ , c'est-à-dire:

$$g(t, \tau) \equiv H\delta(t - \tau)$$

on obtient, pour un système **linéaire**, l'intégrale de convolution liant la sortie au temps  $t$  aux entrées passées, présente et futures:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau)u(\tau)d\tau$$

- Si le système est **stationnaire**, ses caractéristiques ne varient pas avec le temps, c'est-à-dire

$$g(t, \tau) = g(t + \alpha, \tau + \alpha)$$

où  $\alpha$  représente un déplacement temporel quelconque.

Pour  $\alpha = -\tau$ , l'équation précédente donne:

$$g(t, \tau) = g(t - \tau, 0)$$

que l'on a pris l'habitude de noter plus simplement  $g(t - \tau)$ . On remarque donc que la réponse impulsionnelle d'un système linéaire, stationnaire ne dépend que de la différence entre  $t$  et  $\tau$ .

Pour un système linéaire et stationnaire, l'intégrale de convolution

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

s'écrit également sous la forme du produit de convolution:

$$y(t) = g(t) * u(t) = u(t) * g(t)$$

- Si le système est **causal**, la borne supérieure d'intégration est  $t$  car les entrées futures n'influencent pas  $y(t)$ .

De façon générale, la sortie d'un système dynamique continu, monovarié, linéaire, stationnaire et causal (mais pas nécessairement initialement au repos) à l'entrée  $u(t)$  est donnée par la représentation temporelle externe suivante (intégrale de convolution):

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (1.1)$$

Cette dernière est obtenue à l'aide du changement de variable  $\nu = t - \tau$ .

- Si le système est **initialement au repos** (conditions initiales nulles), le comportement du système dans le passé ( $t < 0$ ) n'influencera pas son comportement futur (pour  $t \geq 0$ ). Les bornes d'intégration de l'équation (1.1) sont ainsi modifiées comme suit:

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (1.2)$$

Cette relation temporelle est caractéristique d'un système dynamique continu, monovarié, linéaire, stationnaire, causal et initialement au repos (**système lscr**). La représentation fréquentielle correspondante est (cf. § 1.3.3):

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

La représentation (1.2):

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

est valable uniquement si le système est au repos au temps  $t = 0$ . Dans le cas contraire, il convient d'utiliser la relation (1.1) qui peut également s'écrire:

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 g(t - \tau)u(\tau)d\tau + \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau = y_0(t) + \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

où  $y_0(t)$  résume l'effet de l'entrée  $u(\tau)$ , pour tout  $\tau < 0$ , au temps  $t$ .

Dans les représentations (1.1) et (1.2), le système dynamique est caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $g(t)$ ,  $t \geq 0$ , que l'on peut obtenir à partir de mesures entrée-sortie (cf. chapitres 2 et 3).

Comme il est difficile de générer expérimentalement des impulsions de Dirac, on utilise de préférence un saut échelon de l'entrée pour exciter un système dynamique:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ A & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

La réponse expérimentale  $\gamma(t)$  peut s'écrire:

$$\gamma(t) = \int_0^t g(t - \tau)Ad\tau = \int_0^t g(\tau)Ad\tau$$



d'où

$$g(t) = \frac{1}{A} \frac{d\gamma(t)}{dt}$$

La réponse impulsionnelle est donc la dérivée de la réponse indicielle (pour  $A = 1$ ). Cette constatation permet de calculer la réponse impulsionnelle à partir de la réponse à un saut échelon obtenue expérimentalement.

### 1.3.1.2 Systèmes dynamiques discrets

Avec la période d'échantillonnage  $T$  et la notation  $y(k) \equiv y(kT)$ , on obtient la représentation suivante pour le système multivariable de la figure 1.15:

$$\begin{aligned} y_1(k) &= h_1[u_1(h), u_2(h), \dots, u_p(h), h] \\ &\vdots \\ y_q(k) &= h_q[u_1(h), u_2(h), \dots, u_p(h), h] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} -\infty < h < \infty & \text{ pour un système dynamique, en général} \\ -\infty < h \leq k & \text{ pour un système dynamique causal,} \\ h = k & \text{ pour un système statique.} \end{aligned}$$

La sortie d'un système dynamique discret, monovarié, lscr est donnée par la somme ou produit de convolution suivant:

$$y(k) = \sum_{j=0}^k g(k-j)u(j) = \sum_{j=0}^k g(j)u(k-j) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

ou

$$y(k) = g(k) * u(k) = u(k) * g(k)$$

Le terme  $g(k-j)$  représente la réponse du système au temps  $kT$  à l'impulsion unité au temps  $jT$ , c'est-à-dire à

$$u(i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

La représentation fréquentielle correspondante devient:

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

*Ecrire le produit de convolution pour le cas d'un système dynamique discret lsc, c'est-à-dire pas nécessairement initialement au repos.*

**Remarque** Il est important de noter que  $g(k)$ , la réponse impulsionnelle d'un système lscr discret, n'est pas nécessairement égale à  $g(t)|_{kT}$ , la version échantillonnée de la réponse impulsionnelle du système continu correspondant. Pour le montrer, il suffit d'écrire l'intégrale de convolution (1.2) pour le temps  $kT$ :

$$y(kT) = \int_0^{kT} g(kT - \tau)u(\tau)d\tau \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

et d'introduire l'approximation

$$u(\tau) = u(jT) \quad jT \leq \tau < (j+1)T \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

qui permet d'exprimer l'intégrale ci-dessus par la contribution de l'entrée présente  $u(kT)$  plus la somme de  $k$  contributions liées aux entrées passées:

$$y(kT) = g(0)u(kT) + \sum_{j=0}^{k-1} \left[ \int_{jT}^{(j+1)T} g(kT - \tau) d\tau \right] u(jT) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En comparant cette dernière expression avec l'équation (1.3), on obtient directement:

$$g(k-j) = \int_{jT}^{(j+1)T} g(kT - \tau) d\tau \cong Tg(kT - jT)$$

d'où l'on tire:

$$g(k) \cong Tg(t)|_{kT} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

*Justifier intuitivement la relation (1.4).*

## 1.3.2 Représentation temporelle interne

### 1.3.2.1 Notion d'état

**a) Définition:** L'état d'un système dynamique déterministe à un instant donné est l'information minimale qui permet, à partir des entrées futures, de déterminer de façon univoque le comportement futur du système.

Plus précisément:

$$\left. \begin{array}{l} \text{état à } t_0 \\ u_{[t_0, \infty)} \end{array} \right\} \rightarrow \text{comportement pour } t \geq t_0$$

Ainsi, l'état d'un système dynamique est l'information résumant parfaitement le passé du système puisqu'il fixe l'évolution future une fois les entrées futures spécifiées. Les équations différentielles (ou aux différences) qui décrivent un système dynamique possèdent des conditions initiales pour  $t_0$ . Ces conditions initiales représentent précisément l'état du système dynamique au temps  $t_0$ .

**b) Exemple 1:** Soit un objet auquel on applique une force (entrée)  $u_{[t_0, \infty)}$  pour  $t \geq t_0$ . Afin de déterminer de façon complète la position de l'objet, il est nécessaire de connaître  $x(t_0)$  et  $\dot{x}(t_0)$ . Il résulte de la définition ci-dessus que  $x(t_0)$  et  $\dot{x}(t_0)$  représentent l'état du système à  $t_0$ . Par généralisation,  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$  représentent l'état du système dynamique au temps  $t$ .

On a défini l'état comme  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$ , c'est-à-dire la position et la vitesse de l'objet. Cependant, l'état n'est pas unique. On peut très bien le définir comme, par exemple,  $2x(t)$  et  $x(t) - 5\dot{x}(t)$ . Ces deux dernières variables d'état ne possèdent plus de signification physique immédiate. On voit donc que l'état peut aussi être un concept abstrait dépourvu de sens physique. Néanmoins, l'ingénieur cherchera le plus souvent à définir un état avec une signification physique évidente.

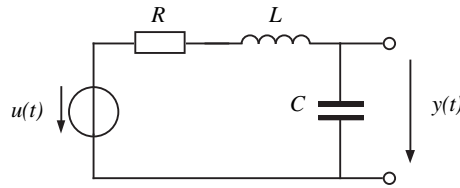


FIG. 1.17 – Circuit électrique.

- c) **Exemple 2:** Soit le circuit électrique représenté à la figure 1.17. Si le courant dans la bobine et la tension aux bornes du condensateur sont connus au temps  $t_0$ , alors  $y(t)$  est entièrement déterminé pour tout  $t \geq t_0$  à partir de  $u_{[t_0, \infty)}$ . Le courant dans la bobine et la tension aux bornes du condensateur représentent ainsi l'état du système dynamique.
- d) **Exemple 3:** Soit le retard unité  $y(t) = u(t - 1)$ . Afin de déterminer  $y_{[t_0, \infty)}$  à partir de  $u_{[t_0, \infty)}$  il faut connaître  $u_{[t_0-1, t_0)}$  qui représente donc l'état du système dynamique à  $t_0$ .

*Ce système est-il dynamique ou statique?*

*Quelle est la dimension de l'état?*

*Quelle sera la dimension de l'état si le système est donné sous forme discrète avec  $T = 1$ ?*

### 1.3.2.2 Modèle d'état continu

- a) **Représentation par variables d'état:** Outre le vecteur d'entrée  $u(t)$  et le vecteur de sortie  $y(t)$ , il convient de considérer le vecteur d'état  $x(t)$  dont les éléments sont appelés variables d'état (par exemple  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$  ci-dessus). La modélisation d'état consiste à mettre au point des relations mathématiques entre les entrées  $u(t)$ , les sorties  $y(t)$  et l'état  $x(t)$ . En particulier, on s'intéresse à une relation liant  $x(t)$  à  $x(t_0)$  et  $u(t)$  pour  $t \geq t_0$ . Ces relations proviennent généralement de lois physiques telles que la loi de mouvement de Newton pour les systèmes mécaniques, les lois de Kirchhoff pour les systèmes électriques, des bilans de matière ou d'énergie pour les systèmes hydrauliques, chimiques ou thermiques. Les modèles ainsi obtenus sont appelés modèles de connaissance ou modèles physiques.

Les équations décrivant le comportement d'un système dynamique peuvent généralement se mettre sous la forme des équations suivantes:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad \text{équation d'état} \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.5)$$

$$y(t) = g[x(t), u(t), t] \quad \text{équation de sortie} \quad (1.6)$$

L'équation d'état décrit le comportement *dynamique* du vecteur d'état  $x(t)$ . L'ordre  $n$  du système est donné par la dimension du vecteur  $x(t)$ .

L'équation de sortie indique une relation *statique* entre le vecteur de sortie  $y(t)$  et les variables d'état  $x(t)$  et d'entrée  $u(t)$ . Souvent,  $u(t)$  n'intervient pas dans l'équation de sortie (pas d'effet direct de l'entrée sur la sortie).

Les équations d'état (1.5) et de sortie (1.6) forment ensemble ce que l'on appelle communément un **modèle d'état**. Si  $f_i[\cdot]$  et  $\partial f/\partial x[\cdot]$  sont des fonctions continues de  $t$ , on démontre qu'il existe une solution unique pour  $x(t)$  étant donnés  $x(t_0)$  et  $u_{[t_0, \infty)}$ .

Pour un système statique, l'équation dynamique (1.5) n'existe pas, et le système se réduit à:

$$y(t) = g[u(t), t]$$

La représentation par variables d'état caractérise le comportement *interne* du système. Une telle représentation est ainsi également valable pour des conditions initiales non nulles, pour des systèmes non linéaires et non stationnaires. De plus, un modèle d'état présente l'avantage d'être simple à implanter sur ordinateur car il se prête directement à l'intégration numérique.

**b) Propriété de linéarité:** Introduisons la notation suivante:

$$\left. \begin{array}{l} \{x(t_0), u_{[t_0, \infty)}\} \\ \text{état à } t_0, \text{ entrées futures} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \{x_{[t_0, \infty)}, y_{[t_0, \infty)}\} \\ \text{états et sorties dans le futur} \end{array} \right\}$$

Un modèle d'état est **linéaire** si et seulement si le principe de superposition est applicable. On peut l'explicitier ainsi (propriétés d'additivité et d'homogénéité):

Si

$$\left\{ \begin{array}{ll} \{x^1(t_0), u_{[t_0, \infty)}^1\} & \rightarrow \{x_{[t_0, \infty)}^1, y_{[t_0, \infty)}^1\} \\ \{x^2(t_0), u_{[t_0, \infty)}^2\} & \rightarrow \{x_{[t_0, \infty)}^2, y_{[t_0, \infty)}^2\} \\ \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 : \text{ constantes réelles} & \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \{ \alpha_1 x^1(t_0) + \alpha_2 x^2(t_0), \alpha_1 u_{[t_0, \infty)}^1 + \alpha_2 u_{[t_0, \infty)}^2 \} \\ \rightarrow \{ \alpha_1 x_{[t_0, \infty)}^1 + \alpha_2 x_{[t_0, \infty)}^2, \alpha_1 y_{[t_0, \infty)}^1 + \alpha_2 y_{[t_0, \infty)}^2 \} \end{aligned}$$

où les exposants 1 et 2 indiquent deux essais distincts, alors le modèle d'état est linéaire. Dans le cas contraire, le modèle est non linéaire.

Cette condition de linéarité permet de déduire les cas particuliers suivants:

- Pour  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  et  $x^1(t_0) = -x^2(t_0)$ ;  $u_{[t_0, \infty)}^1 = -u_{[t_0, \infty)}^2$

on a:

$$x_{[t_0, \infty)}^1 = -x_{[t_0, \infty)}^2 \quad \text{et} \quad y_{[t_0, \infty)}^1 = -y_{[t_0, \infty)}^2$$

et finalement:

$$\{0, 0_{[t_0, \infty)}\} \rightarrow \{0_{[t_0, \infty)}, 0_{[t_0, \infty)}\}$$

c'est-à-dire une sortie identiquement nulle pour un système au repos et sans excitation.

- Pour  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  et  $x^1(t_0) = x(t_0)$ ,  $u_{[t_0, \infty)}^1 = 0$   
 $x^2(t_0) = 0$ ,  $u_{[t_0, \infty)}^2 = u_{[t_0, \infty)}$

on a:

$$\{x(t_0), u_{[t_0, \infty)}\} \rightarrow \{x_{[t_0, \infty)}^1 + x_{[t_0, \infty)}^2, y_{[t_0, \infty)}^1 + y_{[t_0, \infty)}^2\}$$

c'est-à-dire la réponse à  $\{x(t_0), u_{[t_0, \infty)}\} =$  réponse à  $\{x(t_0), 0\}$  due uniquement à l'état initial + réponse à  $\{0, u_{[t_0, \infty)}\}$  due uniquement à l'entrée.

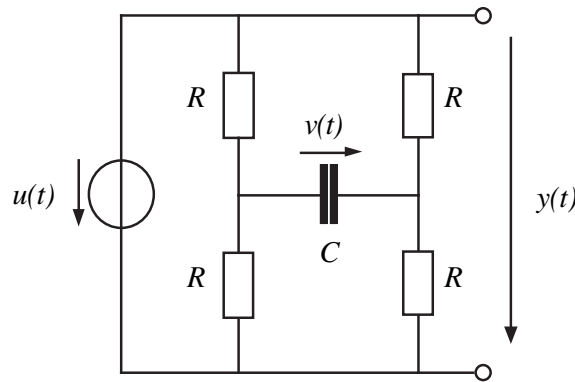


FIG. 1.18 – Circuit électrique avec un condensateur non linéaire.

En d'autres termes, pour les systèmes linéaires, ces deux réponses peuvent être étudiées séparément et additionnées ensuite.

Le principe de superposition est donc valable

- pour la sortie (similaire au cas de la représentation externe),
- ainsi que pour l'état du système (nouveau)
  - pour un état initial nul,
  - mais également pour un état initial non nul.

Il s'ensuit qu'un système linéaire dans sa représentation externe n'est pas nécessairement linéaire dans sa représentation d'état comme cela sera illustré dans l'exemple ci-dessous.

*La réciproque est-elle vraie, c'est-à-dire est-ce qu'un système qui est linéaire dans sa représentation d'état est toujours linéaire dans sa représentation externe?*

Le modèle d'état donné par les équations (1.5) et (1.6) est linéaire si et seulement si les fonctions  $f$  et  $g$  sont linéaires par rapport à  $x(t)$  et  $u(t)$ . Dans ce cas, il s'écrit:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) && \text{équation d'état} && x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) && \text{équation de sortie} \end{aligned}$$

**Exemple:** Soit le circuit électrique de la figure 1.18 possédant un condensateur avec une caractéristique non linéaire  $C = C(v)$  où  $v(t)$  est la tension aux bornes de ce condensateur.

Si  $v(t_0) = 0$  alors  $v(t) = 0$  pour tout  $t \geq t_0$  (pour des raisons évidentes de symétrie). Le système est donc linéaire quant à son comportement entrée-sortie  $u(t) \rightarrow y(t)$ . Le système est par contre non linéaire quant à sa représentation par variables d'état, car il contient un élément non linéaire.

- c) **Propriété de stationnarité:** Un système est **stationnaire** si ses caractéristiques ne varient pas avec le temps. Par exemple, pour un système dynamique linéaire, on a:

$$A(t) = A; \quad B(t) = B; \quad C(t) = C; \quad D(t) = D$$

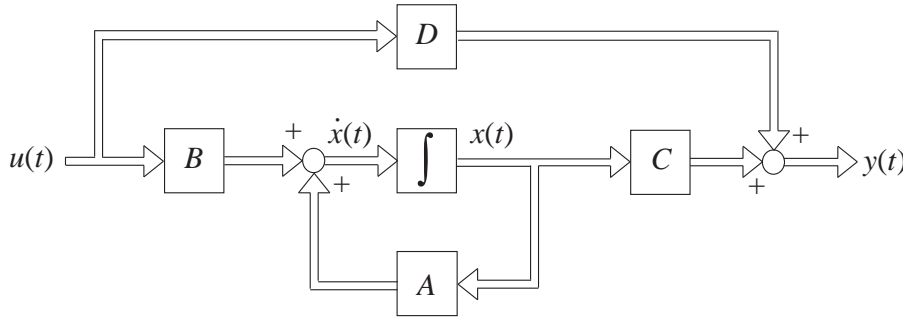


FIG. 1.19 – Système dynamique linéaire et stationnaire.

ce qui donne le modèle d'état linéaire et stationnaire suivant:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) && \text{équation d'état} && x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) && \text{équation de sortie} \end{aligned}$$

Ce système est également causal car  $u(\tau)$  n'influence  $x(t)$  et  $y(t)$  que pour  $\tau \leq t$ .

La figure 1.19 représente le schéma fonctionnel d'un système dynamique linéaire et stationnaire.

### 1.3.2.3 Modèle d'état discret

a) **Représentation par variables d'état:** Par analogie avec le modèle d'état continu (1.5) et (1.6), le modèle d'état discret est constitué d'un système d'équations aux différences du premier ordre:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f[x(k), u(k), k] && \text{équation d'état} && x(k_0) = x_0 \\ y(k) &= g[x(k), u(k), k] && \text{équation de sortie} \end{aligned}$$

Si le système est linéaire, on a:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) && x(k_0) = x_0 \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{aligned}$$

De plus, si le système est stationnaire, la représentation devient:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) && x(k_0) = x_0 \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

Les matrices  $A$  et  $B$  des représentations continues et discrètes sont bien sûr différentes. Pour s'en rendre compte, considérons le modèle d'état continu linéaire et stationnaire suivant:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned}$$

Une discrétisation temporelle selon Euler avec un pas temporel  $T$  donne:

$$\frac{1}{T}[x(k+1) - x(k)] = A_c x(k) + B_c u(k)$$

où

$$x(k+1) = x(k) + A_c T x(k) + B_c T u(k)$$

ou encore

$$x(k+1) = (I + A_c T)x(k) + B_c T u(k)$$

Cette dernière expression représente un modèle d'état discret avec les relations suivantes entre les matrices  $A$  et  $B$  des modèles discret et continu:

$$\begin{aligned} A_d &= I + A_c T \\ B_d &= B_c T \end{aligned}$$

*Quelles sont les relations entre les matrices  $C$  et  $D$  des modèles discret et continu?*

La discrétisation selon Euler n'est qu'approximative. On démontre qu'une «discrétisation exacte», qui utilise toutefois l'approximation

$$u(t) = u(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$

donne les relations suivantes:

$$A_d = e^{A_c T} \equiv I + A_c T + A_c^2 \frac{T^2}{2} + \dots$$

si  $A_c$  est régulière

$$\begin{aligned} B_d &= \int_0^T e^{A_c(T-\tau)} B_c d\tau = (e^{A_c T} - I) A_c^{-1} B_c \\ &= \left( A_c T + A_c^2 \frac{T^2}{2} + \dots \right) A_c^{-1} B_c = B_c T + A_c B_c \frac{T^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

On remarque que la discrétisation selon Euler correspond à l'approximation linéaire par rapport à la période d'échantillonnage  $T$  de la discrétisation exacte. *Calculer le modèle d'état discret qui correspond au modèle d'état continu monovarié du premier ordre  $\dot{x} = ax + bu$ .*

**b) Exemple:** Plan d'épargne d'une banque, période = 1 mois, avec:

$s(k)$  = solde à la période  $k$

$d(k)$  = dépôt pour la période  $k$

$r(k)$  = retrait pour la période  $k$

$i(k)$  = taux d'intérêt pour la période  $k$

Un bilan pour la période  $k$  donne:

$$s(k+1) = s(k) + d(k) - r(k) + i(k)[s(k) + d(k) - r(k)]$$

ou

$$s(k+1) = [1 + i(k)]s(k) + [1 + i(k)]d(k) - [1 + i(k)]r(k) \quad s(k_0) = s_0$$

Avec

$$u(k) = \begin{bmatrix} d(k) \\ r(k) \end{bmatrix} \quad x(k) = s(k) \quad y(k) = s(k)$$

on retrouve un système dynamique discret, multivariable, linéaire et non stationnaire.

*Sous quelle condition ce modèle d'état dynamique non stationnaire devient-il stationnaire?*

*Quel est l'ordre de ce modèle d'état?*

### 1.3.3 Représentation fréquentielle externe

#### 1.3.3.1 Notion de fonction de transfert

Une représentation à partir de la transformée de signaux temporels (par exemple, transformée de Laplace, transformée de Fourier, transformée en  $z$ ) est souvent utile. On peut ainsi calculer une fonction de transfert continue

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = L[g(t)] \equiv \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt \quad (1.7)$$

ou discrète:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = Z[g(k)] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} \quad (1.8)$$

Contrairement à la représentation par modèle d'état, la représentation par fonction de transfert est uniquement valable pour les  *systèmes lscr* (linéaires, stationnaires, causals et initialement au repos). Par contre, si applicable, la représentation par fonction de transfert est souvent plus simple car elle fait intervenir une relation algébrique au lieu d'une relation différentielle.

Pour un système multivariable, on peut définir une matrice de fonctions de transfert ou matrice de transfert. Par exemple, pour un système avec deux entrées et deux sorties (fig. 1.20), on a:

$$G(s) = [G_{ij}(s)] = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

avec

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} \quad i, j = 1, 2$$

Le concept de pôles et de zéros propre à la représentation fréquentielle est très utile pour l'étude de stabilité et de performance des systèmes bouclés. Par contre, la représentation fréquentielle est mal appropriée à la simulation numérique, pour laquelle on préfère utiliser un modèle d'état.



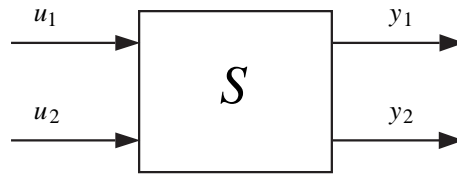


FIG. 1.20 – Système multivariable avec 2 entrées et 2 sorties.

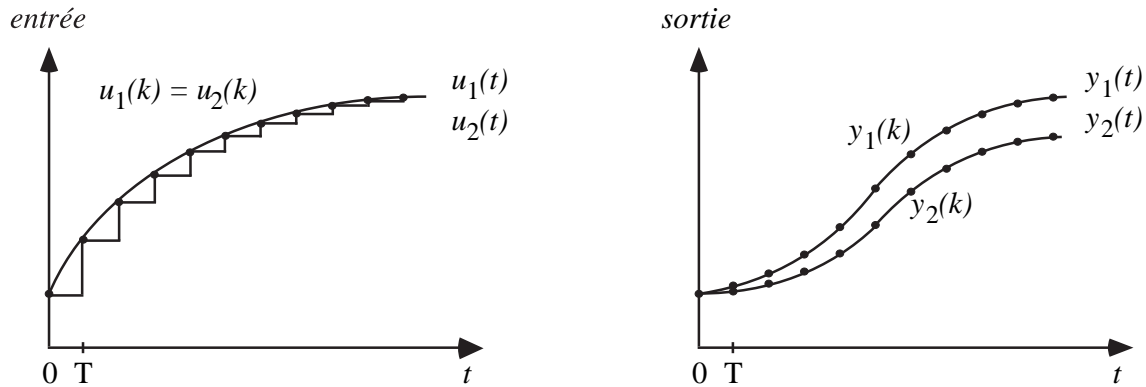


FIG. 1.21 – Signaux d'entrée et de sortie.

### 1.3.3.2 Relation entre $G(s)$ et $G(z)$

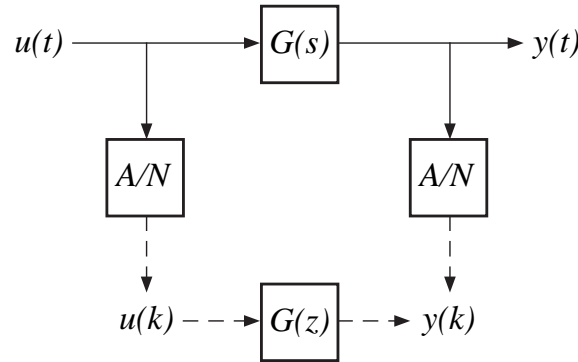
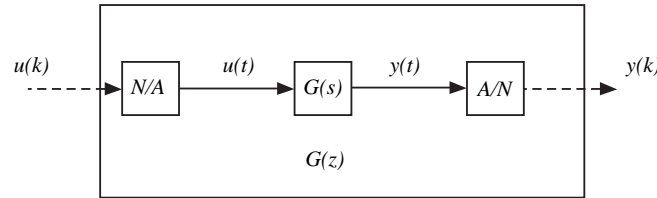
Pour l'implantation d'un régulateur numérique, il est souvent nécessaire de calculer un régulateur  $G(z)$  qui soit «équivalent» à un  $G(s)$  obtenu par synthèse analogique. D'autre part, puisqu'une identification paramétrique par moindres carrés génère  $G(z)$  (cf. chapitre 3), il est souvent désirable d'évaluer un  $G(s)$  «équivalent» qui permettra d'identifier les paramètres physiques du système. D'où l'intérêt de pouvoir transformer aisément  $G(s)$  en  $G(z)$  et vice versa.

Considérons le système continu  $G(s)$  avec l'entrée  $U_1(s)$  et la sortie  $Y_1(s) = G(s)U_1(s)$ . Les signaux temporels correspondants  $u_1(t)$  et  $y_1(t)$  sont représentés à la figure 1.21. Considérons maintenant l'entrée échelon  $u_2(t)$  dont la sortie sera  $y_2(t)$ . La figure 1.21 indique également la version échantillonnée de ces signaux où l'on remarque que  $u_1(k) = u_2(k)$  par construction et, bien sûr,  $y_1(k) \neq y_2(k)$ . Il en résulte que  $G_1(z) = Y_1(z)/U_1(z)$  est différent de  $G_2(z) = Y_2(z)/U_2(z)$ . On voit donc que, pour un  $G(s)$  donné, le  $G(z)$  correspondant dépendra de l'entrée  $u(t)$ . Analysons ce problème plus en détail.

La procédure d'échantillonnage des signaux d'entrée et de sortie du système continu  $G(s)$  afin d'obtenir la fonction de transfert discrète  $G(z)$  est représentée à la figure 1.22.

On peut ainsi écrire:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y(k)\}}{\mathcal{Z}\{u(k)\}} = \frac{\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]|_{kT}\}}{\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}[U(s)]|_{kT}\}} \quad (1.9)$$

FIG. 1.22 – Schéma pour l'évaluation de  $G(z)$ .FIG. 1.23 – Evaluation de  $G(z)$  en considérant les convertisseurs N/A et A/N.

**a) Evaluation de  $G(z)$  en considérant l'entrée  $u(t)$  générée par un ZOH :**

Cette approche est importante en automatique car elle correspond au cas où le processus est entouré par des convertisseurs N/A (avec un élément de maintien d'ordre zéro ZOH) et A/N (fig. 1.23).

L'entrée  $u(t)$  sera de la forme  $u_2(t)$  dans la figure 1.21. Pour  $U(s) = 1/s$ , l'équation (1.9) permet d'écrire:

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}[G(s)/s]|_{kT}\}}{\frac{1}{1-z^{-1}}} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}[G(s)/s]|_{kT}\} \quad (1.10)$$

*Est-ce que la relation (1.9) est exacte pour une entrée échelon du type  $u(t) = \sum_i \alpha_i \varepsilon(t - iT)$  où  $\varepsilon(t)$  représente le saut unité au temps  $t = 0$ ?*

**Exemple:** Soit la fonction de transfert analogique  $G(s) = \frac{1}{s+1}$ . Evaluons  $G(z)$  pour  $T = 0.2$ .

L'équation (1.10) donne:

$$\begin{aligned} G(z) &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]\Bigg|_{kT}\right\} \\ &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]\Bigg|_{kT}\right\} = (1-z^{-1})\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right] \\ &= 1 - \frac{1-z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}} = \frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}} = \frac{0.18z^{-1}}{1-0.82z^{-1}} \end{aligned}$$

**b) Evaluation de  $G(z)$  sur la base de la réponse impulsionnelle de  $G(s)$ :**

On considère  $u(t)$  comme étant l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$  qui est définie ainsi:

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \rho(t) \quad \text{avec} \quad \rho(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/T & 0 \leq t < T \\ 0 & t \geq T \end{cases}$$

En première approximation, pour  $T$  petit mais différent de 0, on a:

$$u(k) = \frac{1}{T}, 0, \dots \quad k = 0, 1, \dots$$

et ainsi

$$U(z) = \frac{1}{T}$$

L'équation (1.9) permet d'écrire:

$$G(z) \cong T \mathcal{Z} \{ \mathcal{L}^{-1} [G(s)] |_{kT} \} \quad (1.11)$$

$G(z)$  est ainsi calculée de façon à ce que sa réponse impulsionnelle  $g(k)$  soit égale à  $Tg(t)|_{kT}$ , où  $g(t)|_{kT}$  représente la version échantillonnée de la réponse impulsionnelle de  $G(s)$ .

La relation (1.11) devient exacte pour le cas  $u(t) = \delta(t)$  mais reste approximative pour tout autre signal  $u(t)$ .

Vérifier cette dernière affirmation en comparant, par exemple, les réponses impulsionnelles et indicielles de  $G(s) = 1/(s+1)$  et de  $G(z)$  calculé selon (1.11) avec  $T = 0.2$ .

**Exemple:** A partir de  $G(s) = 1/(s+1)$ , évaluons  $G(z)$  pour  $T = 0.2$ .

L'équation (1.11) donne:

$$T \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+1} \right] \Big|_{kT} \right\} = T \frac{1}{1 - e^{-T} z^{-1}} = \frac{0.2}{1 - 0.82z^{-1}}$$

**c) Evaluation de  $G(z)$  par transformation des pôles et des zéros de  $G(s)$ :**

Il s'agit ici d'une méthode empirique qui consiste à transformer, à l'aide de la relation  $z = e^{Ts}$ , tous les pôles et les zéros du système continu. Il convient également d'ajouter suffisamment de zéros à  $z = -1$  afin d'obtenir pour  $G(z)$  le même nombre de zéros que de pôles. Ceci résulte du fait que les zéros à l'infini en continu correspondent à des zéros discrets à  $-1$  (fréquence maximale en discret). Finalement, on ajuste un facteur multiplicatif de  $G(z)$  afin d'obtenir le même rapport d'amplitude pour  $G(z)$  et  $G(s)$  à une fréquence choisie (souvent à basse fréquence:  $s = 0, z = 1$ ).

**Exemple:** A partir de  $G(s) = 1/(s+1)$ , évaluons  $G(z)$  pour  $T = 0.2$  en transformant les pôles et les zéros et en imposant le même gain statique.

Le pôle à  $s = -1$  est transformé en  $z = e^{-T}$ . Nous ajoutons un zéro à  $z = -1$ , ce qui donne:

$$G(z) = K \frac{z+1}{z - e^{-T}}$$

Ajustons le facteur multiplicatif  $K$ :

$$G(s=0) = 1 = G(z=1) = K \frac{2}{1 - e^{-T}} \rightarrow K = \frac{1 - e^{-T}}{2}$$

Finalement:

$$G(z) = \frac{(1 - e^{-T})(z + 1)}{2(z - e^{-T})} = \frac{(1 - e^{-T})(1 + z^{-1})}{2(1 - e^{-T}z^{-1})} = \frac{0.09(1 + z^{-1})}{1 - 0.82z^{-1}}$$

**d) Evaluation de  $G(z)$  par différences finies:** L'équation différentielle qui correspond à  $G(s)$  peut être discrétisée par une méthode de différences finies. Il est ensuite simple, à partir de l'équation aux différences résultante, de construire  $G(z)$ .

Deux méthodes de différences finies sont particulièrement intéressantes dans ce contexte.

**Intégration rectangulaire rétrograde:** Considérons

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

ou

$$\dot{y}(t) = u(t) \quad y(0) = 0$$

La trajectoire  $y(t)$  peut être approchée par intégration rectangulaire rétrograde:

$$y(k) = y(k-1) + Tu(k)$$

Ainsi:

$$Y(z)[1 - z^{-1}] = TU(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{1 - z^{-1}} = \frac{Tz}{z - 1}$$

et l'on obtient l'approximation:

$$\frac{1}{s} := \frac{Tz}{z - 1} \quad \text{ou} \quad s := \frac{1}{T} \frac{z - 1}{z}$$

Ainsi:

$$G(z) = G(s)|_{s=\frac{1}{T}\frac{z-1}{z}} \tag{1.12}$$

**Intégration trapézoïdale:** Par intégration trapézoïdale, la trajectoire  $y(t)$  est approchée ainsi:

$$y(k) = y(k-1) + T \frac{u(k) + u(k-1)}{2}$$

D'où:

$$Y(z)[1 - z^{-1}] = \frac{T}{2}U(z)(1 + z^{-1})$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{2} \left( \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right) = \frac{T(z + 1)}{2(z - 1)}$$

et

$$\frac{1}{s} := \frac{T(z + 1)}{2(z - 1)} \quad \text{ou} \quad s := \frac{2z - 1}{Tz + 1}$$

Ainsi:

$$G(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}} \quad (1.13)$$

Cette dernière relation est également connue sous le nom de **transformation bilinéaire**.

**Exemple:** A partir de  $G(s) = 1/(s + 1)$ , évaluons  $G(z)$  pour  $T = 0.2$ .

Les équations (1.12) et (1.13) donnent respectivement:

$$G(z) = \frac{1}{s + 1} \Big|_{s=\frac{1}{T} \frac{z-1}{z}} = \frac{1}{\frac{1}{T} \frac{z-1}{z} + 1} = \frac{Tz}{(1 + T)z - 1} = \frac{0.2}{1.2 - z^{-1}}$$

$$G(z) = \frac{1}{s + 1} \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}} = \frac{1}{\frac{2z-1}{Tz+1} + 1} = \frac{T(z + 1)}{(2 + T)z - (2 - T)} = \frac{0.1(1 + z^{-1})}{1.1 - 0.9z^{-1}}$$

- e) **Evaluation de  $G(s)$  à partir de  $G(z)$ :** La démarche inverse, c'est-à-dire l'évaluation de  $G(s)$  à partir de  $G(z)$ , n'est pas unique. Il est simple de le comprendre en réalisant que  $G(s)$  et  $G(z)$  sont entièrement définis à l'aide des signaux d'entrée et de sortie correspondants et qu'il est possible de faire correspondre plusieurs signaux analogiques à un signal numérique. Cependant, en supposant que les signaux analogiques d'entrée et de sortie satisfassent au théorème d'échantillonnage de Shannon (c'est-à-dire qu'ils ne contiennent pas de pulsations supérieures à  $\omega_s/2$  où  $\omega_s$  représente la pulsation d'échantillonnage), il est alors possible de reconstruire de façon univoque les signaux analogiques et d'obtenir ainsi la fonction de transfert analogique correspondante.

D'une manière similaire aux équations (1.10)-(1.13), on peut calculer à partir de  $G(z)$  la fonction de transfert  $G(s)$  qui, une fois numérisée, redonnerait  $G(z)$ :

$$G(s) = s\mathcal{L} \left\{ \mathcal{Z} \left[ \frac{G(z)}{1 - z^{-1}} \right] \right\} \quad (1.14)$$

$$G(s) = \frac{1}{T} \mathcal{L} \{ \mathcal{Z}^{-1}[G(z)] \} \quad (1.15)$$

$$G(s) = G(z) \Big|_{z=\frac{1}{1-Ts}} \quad (1.16)$$

et

$$G(s) = G(z) \Big|_{z=\frac{1+Ts/2}{1-Ts/2}} \quad (1.17)$$

TAB. 1.2 – Comparaison de différentes méthodes pour évaluer  $G(z)$  à partir de  $G(s) = 1/(s + 1)$  et  $T = 0.2$ .

Méthode	Equation	$G(z)$
Elément de maintien d'ordre zéro	1.10	$\frac{0.18z^{-1}}{1 - 0.82z^{-1}}$
Réponse impulsionnelle	1.11	$\frac{0.2}{1 - 0.82z^{-1}}$
Transformation des pôles et des zéros		$\frac{0.09(1 + z^{-1})}{1 - 0.82z^{-1}}$
Intégration rectangulaire rétrograde	1.12	$\frac{0.2z^{-1}}{1.2 - z^{-1}}$
Transformation bilinéaire (intégration trapézoïdale)	1.13	$\frac{0.1(1 + z^{-1})}{1.1 - 0.9z^{-1}}$

On vérifie aisément les relations (1.16) et (1.17) à partir de la relation  $z = e^{Ts}$ . En effet:

$$\begin{aligned}
 z = e^{Ts} &= \frac{1}{e^{-Ts}} \cong \frac{1}{1 - Ts} \\
 z = e^{Ts} &= \frac{e^{(T/2)s}}{e^{-(T/2)s}} \cong \frac{1 + \frac{Ts}{2}}{1 - \frac{Ts}{2}} \quad \text{approximation de Padé}
 \end{aligned}$$

*Retrouver  $G(s)$  à partir de  $G(z)$  pour les exemples précédents.*

**f) Comparaison des diverses méthodes présentées:** Le tableau 1.2 compare les résultats obtenus avec les diverses méthodes pour évaluer  $G(z)$  à partir de  $G(s) = 1/(s + 1)$  et  $T = 0.2$ .

Il faut remarquer qu'il n'existe pas de méthode universelle, c'est-à-dire exacte dans le sens de la figure 1.22 quelle que soit l'entrée  $u(t)$ . Par exemple, la méthode basée sur la réponse indicielle n'est exacte que pour une entrée  $u(t)$  en échelon. Pour toute autre entrée, le  $G(z)$  correspondant ne sera qu'une approximation.

*Evaluer le gain statique et le pôle des fonctions de transfert discrètes du tableau 1.2. Quelle conclusion peut être faite?*

### 1.3.4 Représentation fréquentielle interne

Un modèle d'état *lscr* peut, bien sûr, être mis sous forme fréquentielle en utilisant la transformation de Laplace pour les systèmes continus ou la transformation en  $z$  pour les systèmes discrets.

A titre d'exemple, considérons le système multivariable lscr continu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= 0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

En appliquant la transformation de Laplace à ce système, on obtient:

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) \end{aligned}$$

c'est-à-dire la représentation fréquentielle interne suivante:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) \end{aligned}$$

d'où l'on tire la matrice de transfert:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

et la matrice des réponses impulsionnelles:

$$G(t) = Ce^{At}B$$

*Montrer que pour un système monovariante lscr du premier ordre, la réponse impulsionnelle est  $g(t) = ce^{at}b$ .*

Les matrices de transfert  $G(z)$  et des réponses impulsionnelles  $G(k)$  pour un système multivariable lscr discret sont respectivement:

$$\begin{aligned} G(z) &= C(zI - A)^{-1}B \\ G(k) &= CA^{k-1}B \end{aligned}$$

*Démontrer ces relations pour le cas scalaire (système monovariante du premier ordre).*

### 1.3.5 Comparaison des différentes méthodes de représentation

Les différentes représentations, classifiées selon les trois critères

- représentation temporelle/fréquentielle,
- représentation externe/interne,
- représentation continue/discrete.

sont illustrées dans le tableau 1.3 pour le cas d'un système dynamique avec l'entrée  $u$ , l'état  $x$  et la sortie  $y$ .

**Tableau 1.3** Méthodes de représentation d'un système dynamique. Les hypothèses pour les différents modèles sont indiquées en hachuré (l: linéaire, s: stationnaire, c: causal, r: initialement au repos).

	Externe (entrée - sortie)		Interne (modèle d'état)	
	Continue	Discrète	Continue	Discrète
Temporelle	<div style="background-color: #cccccc; display: inline-block; padding: 2px;">c</div> $y(t) = h[u(\tau), \tau]$ $-\infty < \tau \leq t$	<div style="background-color: #cccccc; display: inline-block; padding: 2px;">c</div> $y(k) = h[u(h), h]$ $-\infty < h \leq k$	<div style="background-color: #cccccc; display: inline-block; padding: 2px;">c</div> $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$ $x(0) = x_0$ $y(t) = g[x(t), u(t), t]$	<div style="background-color: #cccccc; display: inline-block; padding: 2px;">c</div> $x(k+1) = f[x(k), u(k), k]$ $x(0) = x_0$ $y(k) = g[x(k), u(k), k]$
	<div style="background-color: #cccccc; display: inline-block; padding: 2px;">lsc</div> $g_{ij}(t)$ $y_i(t) = \int_{-\infty}^t g_{ij}(t-\tau) u_j(\tau) d\tau$	<div style="background-color: #cccccc; display: inline-block; padding: 2px;">lsc</div> $g_{ij}(k)$ $y_i(k) = \sum_{h=-\infty}^k g_{ij}(k-h) u_j(h)$	<div style="background-color: #cccccc; display: inline-block; padding: 2px;">lsc</div> $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $x(0) = x_0$ $y(t) = Cx(t) + Du(t)$	<div style="background-color: #cccccc; display: inline-block; padding: 2px;">lsc</div> $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ $x(0) = x_0$ $y(k) = Cx(k) + Du(k)$
Fréquentielle	<div style="background-color: #cccccc; display: inline-block; padding: 2px;">lscr</div> $G_{ij}(s) = \mathcal{L} [g_{ij}(t)]$ $Y(s) = [G_{ij}(s)] U(s)$	<div style="background-color: #cccccc; display: inline-block; padding: 2px;">lscr</div> $G_{ij}(z) = Z [g_{ij}(k)]$ $Y(z) = [G_{ij}(z)] U(z)$	<div style="background-color: #cccccc; display: inline-block; padding: 2px;">lscr</div> $X(s) = (sI - A)^{-1} B U(s)$ $Y(s) = C X(s) + D U(s)$	<div style="background-color: #cccccc; display: inline-block; padding: 2px;">lscr</div> $X(z) = (zI - A)^{-1} B U(z)$ $Y(z) = C X(z) + D U(z)$



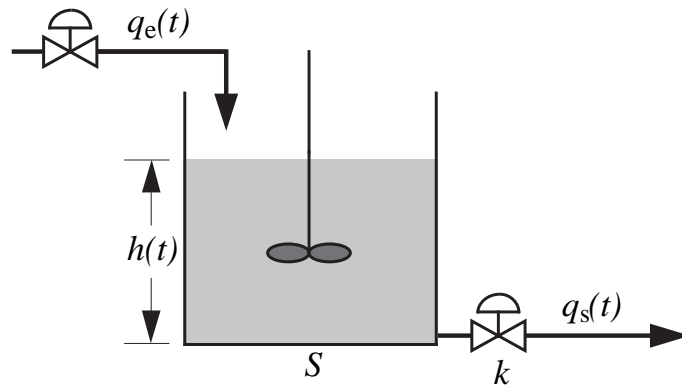


FIG. 1.24 – Cuve agitée.

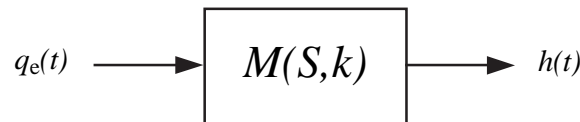


FIG. 1.25 – Modèle de la cuve agitée.

## 1.4 EXEMPLES

### 1.4.1 Cuve agitée

Soit la cuve agitée donnée à la figure 1.24. Le débit volumique de sortie  $q_s(t)$  dépend du niveau de liquide  $h$  suivant la relation:

$$q_s(t) = k\sqrt{h(t)}$$

La masse volumique  $\rho$  est constante. Si  $q_e(t)$  représente le débit volumique d'entrée et  $S$  la surface de section, on peut écrire le bilan massique suivant:

$$\frac{d}{dt}[\rho S h(t)] = \rho q_e(t) - \rho q_s(t)$$

ou

$$S \frac{dh(t)}{dt} = q_e(t) - k\sqrt{h(t)} \quad h(0) = h_0$$

Nous retrouvons un modèle d'état continu, à paramètres localisés, causal, mono-variable, déterministe, non linéaire et stationnaire. Ce modèle  $M(S, k)$  est représenté schématiquement à la figure 1.25 et comporte les grandeurs suivantes:

- deux paramètres constants:  $S, k$
- une variable indépendante (entrée):  $q_e(t)$
- une variable dépendante (état, sortie):  $h(t)$

Plusieurs problèmes peuvent être étudiés sur la base de ce modèle de connaissance:

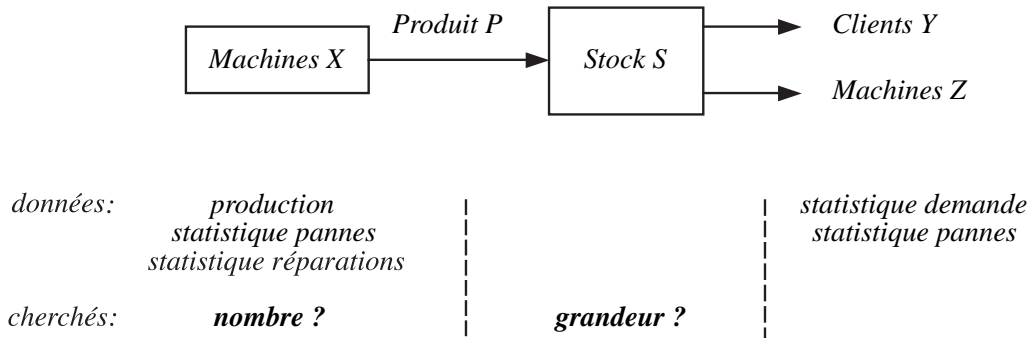


FIG. 1.26 – Système de production et de stockage.

- **Simulation**

donnés:  $M(S, k), h(t = 0), q_e(t)$

cherché:  $h(t)$ , c'est-à-dire le comportement dynamique du système.

Pour ce système simple, la simulation (intégration) peut être analytique ou numérique.

- **Conception**

donnés:  $M(\cdot, \cdot), q_e(t), h(t)$  désiré

cherchés:  $S$  et  $k$ , c'est-à-dire le dimensionnement de la cuve.

Il n'est pas nécessaire de disposer de mesures expérimentales. Le dimensionnement de la cuve peut se faire pour un système projeté.

- **Identification**

donnés:  $M(\cdot, \cdot), q_e(t)$  et  $h(t)$  mesurés

cherchés:  $S$  et  $k$ , c'est-à-dire les caractéristiques de la cuve.

Il faut disposer de mesures expérimentales et donc d'un système existant.

- **Commande**

donnés:  $M(S, k), h(t)$  désiré

cherché:  $q_e(t)$ , c'est-à-dire l'entrée ou grandeur de commande.

Ce problème de commande peut se résoudre sans mesures vu que le modèle du système et la consigne sont connus. Cependant, dans la pratique, la connaissance du modèle est remplacée par la mesure de  $h(t)$ , laquelle est comparée à la consigne pour déterminer la grandeur de commande.

## 1.4.2 Système de production

Soit le système de production et de stockage donné à la figure 1.26. Les caractéristiques de ses éléments sont les suivantes:

- Une machine de type X:
  - exécute 5 pièces par jour,
  - le temps entre les pannes suit une distribution exponentielle avec une valeur moyenne de 20 jours,
  - le temps de réparation est distribué uniformément entre 1 et 2 jours.

- Les clients Y:
  - achètent en moyenne 10 pièces par visite (distribution normale, écart-type de 5 pièces),
  - la probabilité de visite suit une distribution poissonnienne (moyenne 1 visite par jour).
- La machine Z:
  - utilise en moyenne 15 pièces par jour (distribution normale, écart-type de 5 pièces),
  - le temps entre les pannes est distribué uniformément entre 10 et 60 jours,
  - possède un temps de réparation fixe de 1 jour.

L'objectif est d'étudier le système de production et de stockage en fonction du nombre de machines de type X et de la grandeur du stock S. En particulier, on aimerait connaître le taux de fonctionnement des machines X, l'évolution du stock ainsi que le taux des demandes non satisfaites pour les clients Y et les machines Z.

Un modèle du système devrait permettre de mener une étude économique, c'est-à-dire d'analyser les coûts en fonction du nombre de machines de type X et de la grandeur du stock S.

*De quel type de modèle s'agit-il ici?*

## 1.5 EXERCICES RÉSOLUS

### Exercice 1

**Enoncé :** Soit le système dynamique suivant:

$$\dot{y} = a(t)y(t) + b(t)u(t); \quad y(0) = y_0$$

- a) Ce système est-il linéaire, stationnaire, causal, initialement au repos, stable?
- b) Indiquer une démarche pour calculer la réponse indicielle du système.
- c) Calculer les réponses indicielle et impulsionnelle pour le cas où le système est stationnaire et initialement au repos.

**Solution :**

- a) Ce système est *linéaire* (car les variables  $u(t)$  et  $y(t)$  apparaissent linéairement dans l'équation différentielle), *non stationnaire* (car les coefficients a et b ne sont pas constants), *causal* (car la sortie  $y(t)$  ne dépend que des entrées passées et présentes) et *pas initialement au repos* (si  $y_0 \neq 0$ ). Du fait de la non-stationnarité, la *stabilité* est difficile à vérifier.
- b) Du fait de la non-stationnarité, le calcul de la réponse indicielle est difficile à obtenir analytiquement. On peut l'exprimer formellement à l'aide de  $g(t, \tau)$ , la réponse impulsionnelle au temps  $t$  d'un système non stationnaire à une impulsion de Dirac au temps  $\tau$ :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t g(t, \tau) d\tau$$

Malheureusement, il n'est pas possible d'évaluer  $g(t, \tau)$  de façon générale.

c)  $\dot{y} = ay(t) + bu(t) \quad y(0) = 0$

Le système est linéaire, causal, stationnaire et initialement au repos. De plus, le système est stable pour  $a < 0$ . Le produit de convolution s'écrit:

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (1.18)$$

*Réponse impulsionnelle pour  $u(t) = \delta(t)$  :* On obtient dans le domaine fréquentiel:

$$U(s) = 1 \quad G(s) = \frac{b}{s - a} \quad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b}{s - a}$$

La transformation de Laplace inverse de  $Y(s)$  donne:

$$y(t) = g(t) = be^{at} \quad t \geq 0 \quad (1.19)$$

*Réponse indicielle pour  $u(t) = \varepsilon(t)$  :* Les équations (1.18) et (1.19) donnent:

$$y(t) = \int_0^t be^{a(t-\tau)}1d\tau = -\frac{b}{a}[1 - e^{at}] \quad t \geq 0$$

On vérifie aisément que la réponse impulsionnelle est la dérivée temporelle de la réponse indicielle.

## Exercice 2

**Énoncé :** Soit le plan d'épargne d'une banque présenté comme exemple d'un système dynamique discret au 1.3.2.3.

- Sous quelle condition ce système est-il stationnaire?
- Étudier la stabilité BIBO du système dynamique stationnaire.
- Calculer la fonction de transfert discrète  $G(z) = S(z)/D(z)$ .
- Évaluer la constante de temps de ce système dynamique.

**Solution :**

- a) Le modèle d'état discret s'écrit:

$$\begin{aligned} s(k+1) &= a(k)s(k) + b^T(k) \begin{bmatrix} d(k) \\ r(k) \end{bmatrix} & s(k_0) &= s_0 \\ y(k) &= s(k) \end{aligned}$$

avec

$$a(k) = [1 + i(k)] \quad b^T(k) = [(1 + i(k)) \quad - (1 + i(k))]$$

Le système est **non stationnaire** car  $a(k)$  et  $b(k)$  dépendent du temps discret  $k$ . Le système devient stationnaire si le taux d'intérêt reste constant.

**b) Stabilité du système stationnaire :** entrée bornée  $\Rightarrow$  sortie bornée

Pour qu'un système dynamique soit BIBO stable, il faut que toutes les valeurs propres de la matrice d'état soient à l'intérieur du cercle unité ( $|\lambda_j| < 1$ ).

Pour cet exemple:  $|a| < 1$  donc  $|1 + i| < 1 \Rightarrow -2 < i < 0$

Concrètement, un plan d'épargne avec  $i \geq 0$  représente un système dynamique instable.

**c) Fonction de transfert :** Hypothèse: plan d'épargne stationnaire ( $i(k) = i$ ).

La transformation en  $z$  du système dynamique donne:

$$zS(z) = aS(z) + b^T \begin{bmatrix} D(z) \\ R(z) \end{bmatrix}$$

$$Y(z) = S(z)$$

On obtient ainsi:

$$G(z) = \frac{S(z)}{D(z)} = \frac{b_1}{z - a} = \frac{1 + i}{z - (1 + i)}$$

**d) Constante de temps :** Pour un système continu du premier ordre, la constante de temps est liée au pôle comme suit:

$$\tau = \left| \frac{1}{p_c} \right|$$

c'est-à-dire:

$\tau = -1/p_c$  pour un système stable ( $p_c < 0$ ),

$\tau = 1/p_c$  pour un système instable ( $p_c \geq 0$ ).

Le pôle continu  $p_c$  peut se calculer à partir du pôle discret:

$$p_c = \frac{1}{T} \ln(p_d)$$

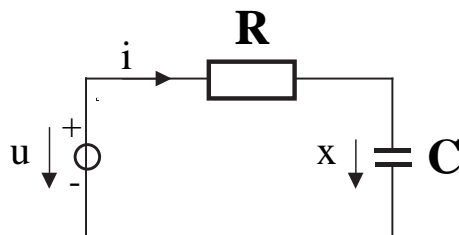
Il s'ensuit:

$$\tau = -\frac{1}{p_c} = -\frac{T}{\ln(p_d)} = -\frac{T}{\ln(1 + i)} \quad \text{pour } -2 < i < 0$$

$$\tau = \frac{1}{p_c} = \frac{T}{\ln(p_d)} = \frac{T}{\ln(1 + i)} \quad \text{pour } i \geq 0$$

### Exercice 3

**Énoncé :** Un circuit électrique de type RC en série ( $R = C = 1$ ) au repos est excité par la tension  $u(t) = e^{-3t}$  ( $t \geq 0$ ).



- a) Calculer la tension aux bornes du condensateur.  
 b) Le courant est-il proportionnel à  $e^{-3t}$ ?

**Solution :**

- a) Circuit RC en série ( $R = C = 1$ ;  $x$ : tension aux bornes du condensateur):

$$\dot{x}(t) + x(t) = u(t) \quad x(0) = 0 \quad (1.20)$$

avec

$$u(t) = e^{-3t} \quad t \geq 0 \quad (1.21)$$

La transformation de Laplace de (1.20) et (1.21) donne:

$$X(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$$

$$U(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{-1/2}{s+3} + \frac{1/2}{s+1}$$

et ainsi:

$$x(t) = -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

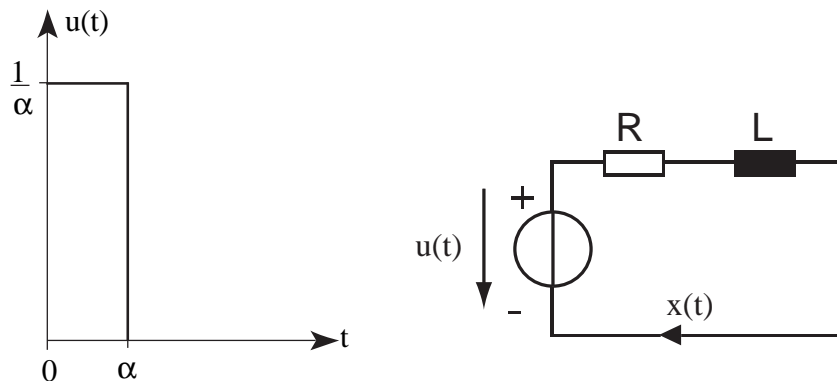
- b) Le courant  $i(t)$  devient:

$$i(t) = \dot{x}(t) = u(t) - x(t) = \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \quad t \geq 0$$

Le courant n'est pas proportionnel à  $e^{-3t}$  à cause de l'effet dynamique du condensateur et du mode correspondant  $e^{-t}$ .

## Exercice 4

**Énoncé :** Soit un circuit électrique de type RL en série ( $R = L = 1$ ) avec un courant initial nul.



- a) Calculer le courant résultant de la tension d'entrée  $u(t)$ ;  
 b) Vers quelle limite tend le courant pour  $\alpha \rightarrow 0$ ?  
 c) Utiliser la propriété de linéarité et la connaissance de la réponse impulsionnelle pour obtenir la réponse à la question a).

**Solution :** Circuit RL en série ( $R = L = 1$ ;  $x$ : courant):

$$\dot{x}(t) + x(t) = u(t) \quad x(0) = 0 \quad (1.22)$$

La transformation de Laplace de (1.22) donne:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} \quad (1.23)$$

a) **Réponse à une impulsion de durée  $\alpha$**

$$u(t) = \frac{1}{\alpha}\epsilon(t) - \frac{1}{\alpha}\epsilon(t - \alpha) \quad \text{avec} \quad \epsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

La transformation de Laplace de (1.24) donne:

$$U(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{s} (1 - e^{-\alpha s}) \quad (1.25)$$

En combinant (1.23) et (1.25), on obtient:

$$X(s) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha s}) \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha s}) \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) \quad (1.26)$$

D'où

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} [\epsilon(t)(1 - e^{-t}) - \epsilon(t - \alpha)(1 - e^{-(t-\alpha)})] \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-t}) & 0 \leq t \leq \alpha \\ \left(\frac{e^\alpha - 1}{\alpha}\right) e^{-t} & t \leq \alpha \end{array} \right. \quad (1.27)$$

b) **Limite pour  $\alpha \rightarrow 0$**

Développement en série de Taylor de  $e^\alpha$  dans (1.27), pour  $t \geq \alpha$ :

$$\frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = \frac{1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots - 1}{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^2}{3!} + \dots \quad (1.28)$$

D'où

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \right) = 1 \quad (1.29)$$

Ainsi, lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ , l'entrée tend vers l'impulsion de Dirac et  $x(t) \rightarrow e^{-t}$  qui représente la réponse impulsionnelle du système.

## c) Calcul de la réponse à l'aide du produit de convolution temporel

$$x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} u(\tau) d\tau \quad (1.30)$$

$$x(t) = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \frac{1}{\alpha} d\tau = \frac{1 - e^{-t}}{\alpha} \quad \text{pour } 0 \leq t < \alpha \quad (1.31)$$

$$x(t) = e^{-t} \int_0^{\alpha} e^{\tau} \frac{1}{\alpha} d\tau = \left( \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} \right) e^{-t} \quad \text{pour } t \geq \alpha \quad (1.32)$$

**Exercice 5**

**Enoncé :** Soit le système dynamique discret stable du premier ordre:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Kz}{z - p}$$

- Calculer la réponse harmonique du système, c'est-à-dire sa réponse en régime permanent à l'excitation harmonique  $u(k) = Ae^{j\omega kT}$ .
- Evaluer le rapport d'amplitude et le déphasage en fonction de la pulsation d'excitation  $\omega$ .
- Dessiner le diagramme de Bode des systèmes discret et continu pour  $K = 2$  et  $p = 0.9$ .

**Solution :**

## a) Réponse harmonique

$$u_k = Ae^{j\omega kT} \Rightarrow U(z) = \frac{A}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} = \frac{Az}{z - e^{j\omega T}}$$

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{KAz^2}{(z - p)(z - e^{j\omega T})} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 z}{z - p} + \frac{\alpha_2 z}{z - e^{j\omega T}}$$

avec

$$\alpha_0 = \left. \frac{KAz^2}{(z - p)(z - e^{j\omega T})} \right|_{z=0} = 0$$

$$\alpha_1 = \left. \frac{KAz}{z - e^{j\omega T}} \right|_{z=p} = \frac{KA p}{p - e^{j\omega T}}$$

$$\alpha_2 = \left. \frac{KAz}{z - p} \right|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{KA e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - p}$$

La transformation en z inverse donne:

$$y_k = \alpha_1 p^k + \alpha_2 e^{j\omega kT} = y_k^1 + y_k^2$$

Réponse en régime permanent ( $\bar{y}_k = \bar{y}_k^1 + \bar{y}_k^2$ )

$$\bar{y}_k^1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_1 p^k = 0 \quad \text{pour } |p| < 1$$

$$\bar{y}_k^2 = \alpha_2 e^{j\omega kT} \Rightarrow \bar{y}_k = \alpha_2 e^{j\omega kT} \quad \text{pour } |p| < 1$$



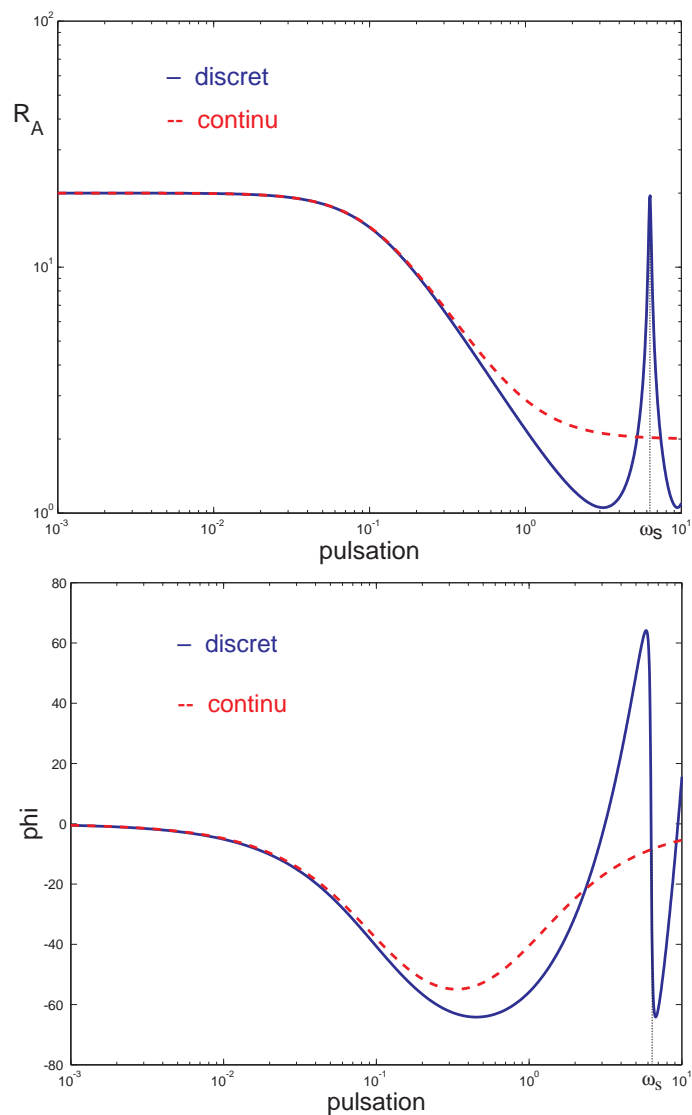
## b) Rapport d'amplitude et déphasage en régime permanent

$$R_A = \left| \frac{\bar{y}_k}{\bar{u}_k} \right| = \left| \frac{\alpha_2}{A} \right| = \left| \frac{K e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - p} \right|$$

$$\varphi = \arg(\bar{y}_k) - \arg(\bar{u}_k) = \arg(\alpha_2) = \arg \left[ \frac{K A e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - p} \right]$$

c) Diagramme de Bode ( $K = 2, p = 0.9$ )

$$G(z) = \frac{2z}{z - 0.9}$$



Matlab **d2c** avec  $T = 1$  ( $\omega_s = 2\pi/T = 2\pi$ )

$$G(s) = \frac{20(0.949s + 1)}{9.49s + 1}$$

## Exercice 6

**Énoncé :** Le système analogique  $G(s) = 2e^{-s}/(5s + 1)$  est à commander avec un microprocesseur.

- Calculer la version échantillonnée  $G(z)$ .
- Quels sont les pôles du système discret?
- Calculer la réponse du système discret à une impulsion unité.

**Solution :**

**a) Version échantillonnée  $G(z)$**

Choix de la période d'échantillonnage:

$$T = \frac{\tau}{10} = 0.5$$

En considérant que  $u(t)$  est générée par un élément de maintien d'ordre zéro (zoh), on obtient:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2e^{-s}}{s(5s + 1)} \right) \Big|_{kT} \right] = \frac{0.19}{z^2(z - 0.90)} \quad (1.33)$$

- b)** Les pôles du système discret sont  $z = 0$  deux fois et  $z = 0.90$ . Le pôle double  $z = 0$  correspond au retard pur de deux périodes d'échantillonnage.

**c) Réponse du système discret à une impulsion unité**

$$G(z) = \frac{0.19}{z^2(z - 0.90)} = 0.23 \left[ \frac{1}{z - 0.90} - \frac{1}{z} - \frac{0.90}{z^2} \right] \quad (1.34)$$

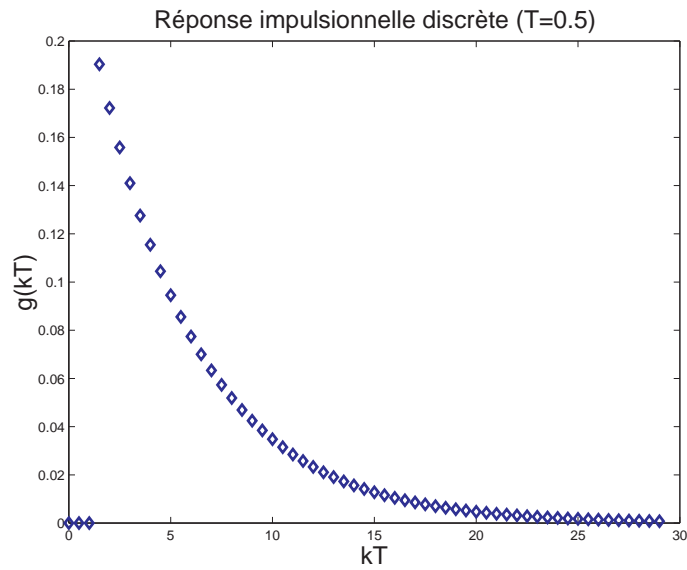
La transformation en  $z$  inverse donne (voir par exemple le tableau C de l'annexe C, entrées 2 et 19):

$$g(k) = 0.23[\epsilon(k - 1)0.90^{k-1} - \delta(k - 1) - 0.90\delta(k - 2)] \quad (1.35)$$

avec

$$\epsilon(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\delta(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$



## Exercice 7

**Énoncé :** Le dimensionnement d'un régulateur PI pour un système dynamique de gain statique 7 a donné le résultat suivant:

$$G_R(s) = 0.72 \left( 1 + \frac{1}{0.06s} \right)$$

Evaluer l'équation aux différences nécessaire à l'implantation de ce régulateur sur microprocesseur.

**Solution :** Le régulateur discret sera entouré de convertisseurs  $A/N$  et  $N/A$ , ce dernier avec un élément de maintien d'ordre zéro. Utilisons donc la méthode correspondante pour calculer  $G_R(z)$  à partir de  $G_R(s)$ :

$$\begin{aligned} G_R(z) &= \frac{U(z)}{E(z)} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G_R(s)}{s} \right] \Big|_{kT} \right\} \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{0.72}{s} + \frac{12}{s^2} \right] \right\} = (1 - z^{-1}) \left[ \frac{0.72}{1 - z^{-1}} + \frac{12Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \right] \\ &= 0.72 + \frac{12Tz^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{0.72 + (12T - 0.72)z^{-1}}{1 - z^{-1}} \end{aligned}$$

On obtient ainsi:

$$U(z)(1 - z^{-1}) = E(z)[0.72 + (12T - 0.72)z^{-1}]$$

La transformation en  $z$  inverse donne:

$$u(k) = u(k-1) + 0.72e(k) + (12T - 0.72)e(k-1) \quad (1.38)$$

Il convient encore de choisir la période d'échantillonnage  $T$  sur la base de la constante de temps dominante du système.

Les règles pour le dimensionnement d'un régulateur PI selon Ziegler-Nichols donnent:

$$K_R = 0.9 \frac{\tau}{\theta K} \quad (1.39)$$

$$\tau_1 = 3.33\theta \quad (1.40)$$

où  $K$ ,  $\tau$ , et  $\theta$  représentent respectivement le gain statique, la constante de temps et le retard pur du système à commander. Le régulateur PI

$$G_R(s) = 0.72 \left( 1 + \frac{1}{0.06s} \right) \quad (1.41)$$

est donc caractérisé par  $K_R = 0,72$  et  $\tau_I = 0,06$ . En combinant (1.39), (1.40) et (1.41) et sachant que  $K = 7$ , on identifie le système à commander suivant:

$$G(s) = \frac{7e^{-0.018s}}{0.1s + 1}$$

Pour ce système dont la constante de temps vaut 0,1, on propose de choisir la période d'échantillonnage  $T = 0,01$ . L'équation (1.38) devient ainsi:

$$u(k) = u(k-1) + 0.72e(k) - 0.6e(k-1)$$

## Exercice 8

**Énoncé :** Soit le système dynamique continu:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 8}$$

- Calculer sa réponse impulsionnelle.
- Utiliser le produit de convolution dans sa forme i) temporelle et ii) fréquentielle pour calculer la réponse à un saut unité.

**Solution :**

a) **Réponse impulsionnelle** pour  $U(s) = 1$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 8} = \frac{1}{(s+2)^2 + 4} = \frac{1}{2} \frac{2}{(s+2)^2 + 4}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow y(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} \sin(2t) \quad (\text{entrée 16 du tableau C.2 de l'annexe C})$$

b) **Réponse indicielle**

i) Produit de convolution temporel

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \sin[2(t-\tau)]1d\tau$$

$$x = 2(t-\tau)$$

$$dx = -2d\tau$$

$$y(t) = -\frac{1}{4} \int_{2t}^0 e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{4} \int_0^{2t} e^{-x} \sin x dx$$

Intégration par parties:

$$I = \int_a^b e^{-x} \sin x \, dx = -e^{-x} \cos x \Big|_a^b - \int_a^b e^{-x} \cos x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\cos x + \sin x) \Big|_a^b$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(t) &= -\frac{1}{8} e^{-x} (\cos x + \sin x) \Big|_0^{2t} = -\frac{1}{8} [e^{-2t} (\cos 2t + \sin 2t) - 1] \\ &= \frac{1}{8} [1 - e^{-2t} (\cos 2t + \sin 2t)] \end{aligned}$$

ii) Produit de convolution fréquentiel

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 8)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4s + 8}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + 4s + 8} = \frac{1}{8}$$

$$1 = A(s^2 + 4s + 8) + Bs^2 + Cs$$

$$\text{termes en } s^2 \quad 0 = A + B \Rightarrow B = -A$$

$$\text{termes en } s^1 \quad 0 = 4A + C \Rightarrow C = -4A$$

$$\text{termes en } s^0 \quad 1 = 8A \Rightarrow A = \frac{1}{8} \quad B = -\frac{1}{8} \quad C = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{8s} - \frac{1}{8} \frac{s + 4}{s^2 + 4s + 8} = \frac{1}{8s} - \frac{1}{8} \left[ \frac{(s + 2) + 2}{(s + 2)^2 + 2^2} \right] \\ &= \frac{1}{8s} - \frac{1}{8} \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 2^2} - \frac{1}{8} \frac{2}{(s + 2)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2t} \cos 2t - \frac{1}{8} e^{-2t} \sin 2t \\ &= \frac{1}{8} [1 - e^{-2t} (\cos 2t + \sin 2t)] \end{aligned}$$

## Exercice 9

**Énoncé :** Soit le système dynamique discret monovarié du premier ordre:

$$\begin{aligned} x(k + 1) &= ax(k) + bu(k) & x(0) &= -2 \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned}$$

a) Calculer la fonction de transfert discrète pour ce système.

b) Evaluer sa réponse impulsionnelle.

**Solution :**

a) **Fonction de transfert discrète**

On considère le système lscr, c'est-à-dire pour  $x(0) = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \rightarrow \quad X(z)(z - a) &= bU(z) \\ Y(z) &= cX(z) \\ \Rightarrow \quad G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{bc}{z - a} \end{aligned}$$

b) **Réponse impulsionnelle** (pour  $x(0) = -2$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \rightarrow \quad zX(z) - zx(0) &= aX(z) + bU(z) & U(z) &= 1 \\ Y(z) &= cX(z) \\ Y(z)(z - a) &= bc - 2cz \\ Y(z) &= \frac{bc}{z - a} - 2c \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \rightarrow y(k) = \begin{array}{cc} bc a^{k-1} & - & 2c a^k \\ (k \geq 1) & & (k \geq 0) \\ \text{réponse } \textit{forcée} & & \text{réponse } \textit{libre} \text{ due} \\ \text{due à l'entrée} & & \text{à la condition} \\ \text{impulsion unité} & & \text{initiale non nulle} \end{array}$$

## Chapitre 2

# MODÈLES DE REPRÉSENTATION NON PARAMÉTRIQUES

### 2.1 INTRODUCTION

Un système dynamique peut être décrit par un modèle de représentation résultant d'une identification expérimentale à partir des signaux d'entrée et de sortie du système. Il existe deux classes de modèles de représentation:

- a) La classe **non paramétrique** avec
  - soit une représentation temporelle (réponse indicielle ou impulsionnelle),
  - soit une représentation fréquentielle (réponse harmonique).
- b) La classe **paramétrique** avec
  - soit une représentation temporelle (équations différentielles ou aux différences),
  - soit une représentation fréquentielle (fonction ou matrice de transfert).

Ce chapitre traite de la représentation *non paramétrique* de systèmes dynamiques. Le système ne sera donc pas décrit par des équations dynamiques ou une fonction de transfert, mais plutôt par sa réponse à des excitations particulières. Le résultat de l'identification sera disponible sous forme:

- graphique:
  - relevé de la réponse indicielle, impulsionnelle ou harmonique,
- numérique:
  - calcul de la réponse impulsionnelle ou harmonique.

Des signaux d'entrée *spécifiques* sont utilisés afin d'obtenir des résultats d'identification faciles à interpréter:

- saut ou impulsion unité,
- signal harmonique,
- signal pseudo-aléatoire.

Cependant, il est également possible d'obtenir une représentation non paramétrique d'un système dynamique à partir de signaux d'entrée *non spécifiques*, comme

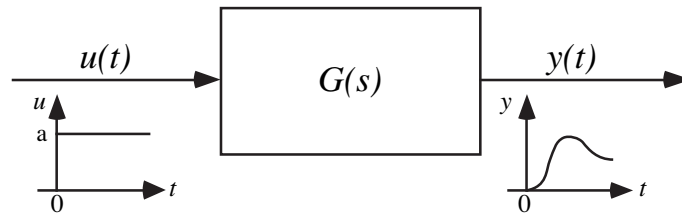


FIG. 2.1 – Système dynamique avec signal d’entrée et de sortie.

on le verra plus tard.

La plupart des approches d’identification ont pour but l’estimation de la fonction de transfert (ou, de façon équivalente, de la réponse impulsionnelle) d’un système dynamique. Or, le concept de fonction de transfert ne s’applique qu’aux systèmes lscr (linéaires, stationnaires, causals et initialement au repos). Cette dernière condition permet d’obtenir des conditions initiales nulles pour autant que l’on travaille avec des **variables écart** par rapport au point de fonctionnement initial, souvent un point d’équilibre du système. Les signaux d’entrée et de sortie seront donc toujours définis comme des déviations par rapport à :

- l’état de repos initial (si celui-ci est connu), ou
- la valeur moyenne du signal pour les données disponibles.

## 2.2 RÉPONSES INDICIELLE ET IMPULSIONNELLE

Un système dynamique est complètement caractérisé, bien que de façon non parcimonieuse, par sa réponse indicielle ou impulsionnelle. On obtient une telle réponse temporelle directement par relevé graphique (fig. 2.1) ou indirectement par déconvolution numérique.

### 2.2.1 Relevé graphique

Le système se trouvant initialement au repos, on mesure ainsi le niveau du bruit sur la sortie. Puis, on l’excite à l’aide d’un saut d’amplitude  $a$ . L’amplitude doit être choisie plus grande que le niveau du bruit et suffisamment petite tel que l’excitation n’entraîne pas le système hors de son domaine de linéarité (*comment le vérifier?*). L’application d’une impulsion de Dirac est pratiquement impossible. Cependant on peut se contenter d’appliquer une impulsion de très grande amplitude et de très courte durée à condition de rester dans le domaine de linéarité. L’observation du signal de sortie se fait jusqu’à l’établissement d’un nouvel état d’équilibre, pour autant qu’il en existe un.

L’observation visuelle de la sortie (fig. 2.2 et 2.3) donne des renseignements sur :

- la présence d’un retard pur,
- le gain statique du système,
- l’ordre du système,



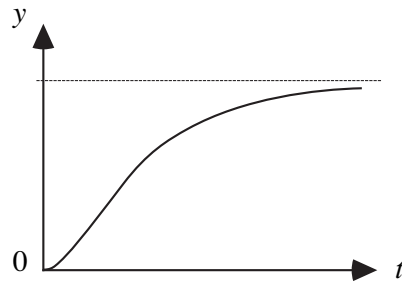


FIG. 2.2 – Réponse indicielle.

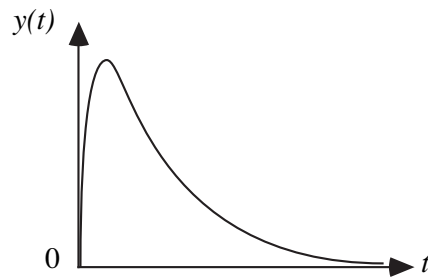


FIG. 2.3 – Réponse impulsionnelle.

- la nature des pôles du système (pôles réels ou complexes),
- le coefficient d'amortissement du système.

### 2.2.2 Déconvolution numérique

Le problème qui consiste à reconstruire la réponse impulsionnelle  $g(t)$  à partir des signaux d'entrée et de sortie  $u(t)$  et  $y(t)$  est appelé **déconvolution**.

Pour des raisons liées à l'implantation numérique, nous considérons ici un système dynamique lscr *discret* donné sous la forme du produit de convolution (cf. § 1.3.1.2):

$$y(k) = \sum_{j=0}^k g(j)u(k-j) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Si le système à étudier est de nature continue, il faut échantillonner son entrée et sa sortie avec une période d'échantillonnage suffisamment petite afin d'obtenir une représentation discrète fiable.

L'équation (2.1) écrite pour  $N$  mesures ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) donne sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) & 0 & \cdots & 0 \\ u(1) & u(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(N-1) & u(N-2) & \cdots & u(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(N-1) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ou

$$y = Ug \quad (2.3)$$

U est une matrice carrée de dimension N. A cause de la forme triangulaire de U, l'équation (2.2) se laisse aisément résoudre de façon récurrente. En effet, pour  $u(0) \neq 0$ , l'équation (2.1) permet d'écrire:

$$g(k) = \frac{1}{u(0)} \left[ y(k) - \sum_{j=0}^{k-1} g(j)u(k-j) \right] \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.4)$$

Le calcul de la réponse impulsionnelle est simplifié lorsque le signal d'entrée n'est pas quelconque mais un *saut unité*:

$$u(k) = 1 \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

L'équation (2.4) permet alors d'écrire:

$$g(k) = y(k) - \sum_{j=0}^{k-1} g(j) \quad (2.6)$$

En considérant toujours l'entrée comme une saut unité, l'équation (2.1) écrite pour l'instant  $(k-1)$  donne:

$$y(k-1) = \sum_{j=0}^{k-1} g(j) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

En combinant les équations (2.6) et (2.7), on obtient:

$$g(k) = y(k) - y(k-1) \quad (2.8)$$

On remarque donc que la réponse impulsionnelle  $g(k)$  est la différence des réponses indicelles à deux instants d'échantillonnage successifs.

Si l'approche par déconvolution numérique est simple, elle souffre cependant d'un inconvénient majeur: les bruits de mesure ne seront pas filtrés et pourront fausser l'identification de  $g(k)$ . On dit qu'il n'existe pas de redondance dans les données. Dans l'équation (2.2) par exemple, il y a  $N$  équations pour les  $N$  inconnues  $g(0), g(1), \dots, g(N-1)$ .

Cependant, comme la réponse impulsionnelle tend rapidement vers zéro (pour les systèmes stables et sans intégrateur), le nombre de termes peut être limité sans trop d'erreur. En considérant  $K$  termes,  $K \leq N$ , l'équation (2.3) devient:

$$\begin{matrix} y \\ (N \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} U_K \\ (N \times K) \end{matrix} \begin{matrix} g_K \\ (K \times 1) \end{matrix} \quad (2.9)$$

Si  $\text{rang}(U_K) = K$ , l'équation (2.9) peut être résolue dans le sens des moindres carrés pour donner  $K$  valeurs discrètes de la réponse impulsionnelle:

$$g_K = U_K^+ y \quad (2.10)$$

$(K \times N)$

où  $U_K^+ = (U_K^T U_K)^{-1} U_K^T$  représente la matrice pseudo-inverse de  $U_K$  (cf. annexe B).

*L'approche par déconvolution numérique est-elle applicable aux systèmes lsc, c'est-à-dire pas nécessairement au repos au temps initial?*

## 2.3 MÉTHODE DE CORRÉLATION

### 2.3.1 Principe

La méthode de corrélation permet de reconstruire la réponse impulsionnelle  $g(k)$  à partir des signaux d'entrée et de sortie du système (fig. 2.4). Il s'agit donc d'une autre façon de résoudre le problème de déconvolution présenté au § 2.2.2.

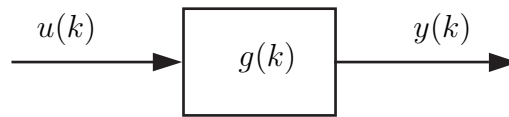


FIG. 2.4 – Système dynamique représenté par sa réponse impulsionnelle.

La méthode de corrélation se base sur l'application du produit de convolution suivant:

$$y(k) = \sum_{j=-\infty}^k g(k-j)u(j) = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)u(k-j) \quad (2.11)$$

et est donc applicable aux systèmes lsc. Pour des conditions initiales nulles, on obtient:

$$y(k) = \sum_{j=0}^k g(k-j)u(j) = \sum_{j=0}^k g(j)u(k-j) \quad (2.12)$$

ou, dans le domaine de  $\mathcal{Z}$ :

$$Y(z) = G(z)U(z) \quad (2.13)$$

Une comparaison des équations (2.11) et (2.12) indique que, en pratique, on préférera travailler avec un système lscr, c'est-à-dire initialement au repos, car le domaine de sommation sera fini, ce qui est un avantage considérable pour une approche numérique.

La figure 2.5 illustre le principe de la méthode de corrélation pour identifier la réponse impulsionnelle d'un système dynamique. Le schéma tient compte de la perturbation  $d(k)$ , par exemple une dérive ou un bruit de mesure, qui agit directement

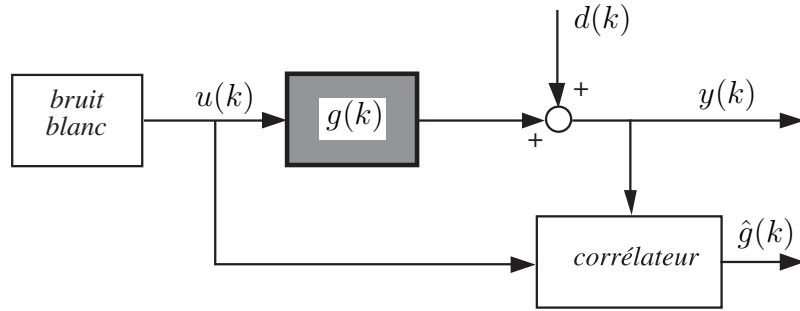


FIG. 2.5 – Schéma de principe de la méthode de corrélation.

sur la sortie. Pour un système lsc, la sortie s'écrit donc :

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)u(k-j) + d(k) \quad (2.14)$$

Comme on le verra par la suite, la méthode de corrélation possède deux avantages importants par rapport à l'approche par déconvolution numérique du § 2.2.2 :

- elle est très peu sensible aux bruits de mesure ou autres perturbations agissant sur la sortie,
- elle est simple à mettre en œuvre pour le cas particulier où l'entrée correspond à un bruit blanc.

### 2.3.2 Fonctions de corrélation pour les signaux déterministes

Pour définir les fonctions de corrélation, il convient de distinguer les signaux à énergie finie des signaux à puissance moyenne finie. La plupart des signaux *transitoires* sont à **énergie finie**, par exemple pour le signal  $u(k)$  :

$$0 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} u^2(k) < \infty \quad (2.15)$$

Par contre, la plupart des signaux périodiques ou aléatoires *permanents* sont à **puissance moyenne finie** :

$$0 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N u^2(k) < \infty \quad (2.16)$$

Les fonctions de corrélation de deux signaux sont une mesure de leur similitude de forme et de position en fonction du paramètre de translation relative  $h$ . L'autocorrélation  $R_{uu}(h)$  décrit l'interdépendance de  $u(k)$  et  $u(k+h)$ , l'intercorrélation  $R_{uy}(h)$  celle de  $u(k)$  et  $y(k+h)$ .

### 2.3.2.1 Signaux à énergie finie

Pour les signaux réels à *énergie finie*, les fonctions de corrélation sont définies comme suit:

#### Autocorrélation

$$R_{uu}(h) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)u(k+h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k-h)u(k) \quad (2.17)$$

#### Intercorrélation

$$R_{uy}(h) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)y(k+h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k-h)y(k) \quad (2.18)$$

$$R_{yu}(h) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)u(k+h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k-h)u(k) \quad (2.19)$$

Pour un nombre fini de données à partir de  $u(k)$  et  $y(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2(N-1)$  on évalue approximativement les fonctions de corrélations pour  $N$  valeurs du paramètre de translation  $h$ . On obtient ainsi:

$$R_{uu}(h) = \sum_{k=0}^{N-1} u(k)u(k+h) \quad h = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.20)$$

$$R_{uy}(h) = \sum_{k=0}^{N-1} u(k)y(k+h) \quad h = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.21)$$

### 2.3.2.2 Signaux à puissance moyenne finie

Pour les signaux réels dont l'un, au moins, est à *puissance moyenne finie*, il convient d'utiliser les définitions suivantes:

#### Autocorrélation

$$R_{uu}(h) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N u(k)u(k+h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N u(k-h)u(k) \quad (2.22)$$

#### Intercorrélation

$$R_{uy}(h) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N u(k)y(k+h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N u(k-h)y(k) \quad (2.23)$$

$$R_{yu}(h) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N y(k)u(k+h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N y(k-h)u(k) \quad (2.24)$$

Pour un nombre fini de données  $2N - 1$  on peut évaluer approximativement les fonctions de corrélation:

$$R_{uu}(h) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k)u(k+h) \quad h = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.25)$$

$$R_{uy}(h) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k)y(k+h) \quad h = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.26)$$

Si  $u(k)$  et  $y(k)$  sont périodiques avec la période  $N$ , c'est-à-dire  $u(k+N) = u(k)$  et  $y(k+N) = y(k)$ , les relations ci-dessus présentent les valeurs exactes des fonctions d'autocorrélation et d'intercorrrelation qui sont également périodiques avec la même période.

### 2.3.2.3 Propriétés

On démontre les propriétés suivantes en utilisant les définitions des fonctions de corrélation:

1. La fonction d'autocorrélation d'un signal réel est une fonction paire:

$$R_{uu}(h) = R_{uu}(-h) \quad (2.27)$$

2. En considérant la position relative des signaux  $u$  et  $y$ , une translation  $h$  de  $u$  est équivalente à une translation  $(-h)$  de  $y$ , d'où la relation:

$$R_{yu}(h) = R_{uy}(-h) \quad (2.28)$$

3. D'autre part, pour tout  $h$ :

$$|R_{uu}(h)| \leq R_{uu}(0) \quad (2.29)$$

$$|R_{uy}(h)| \leq \sqrt{R_{uu}(0)R_{yy}(0)} \leq \frac{1}{2}[R_{uu}(0) + R_{yy}(0)] \quad (2.30)$$

**Remarque:** La définition de l'intercorrrelation de deux signaux proposée ci-dessus est propre au domaine du traitement du signal. Dans d'autres domaines, comme celui de l'automatique, on trouve parfois une autre définition. Par exemple, pour l'intercorrrelation de  $u(k)$  et de  $y(k)$ , on voit souvent:

$$R_{uy}(h) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)y(k-h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k+h)y(k)dt \quad (2.31)$$

On a donc la relation suivante entre les deux définitions:

$$R_{uy}(h) \left| \begin{array}{c} \text{ici} \\ (2.18) \end{array} \right. = R_{uy}(-h) \left| \begin{array}{c} \text{ailleurs} \\ (2.31) \end{array} \right.$$

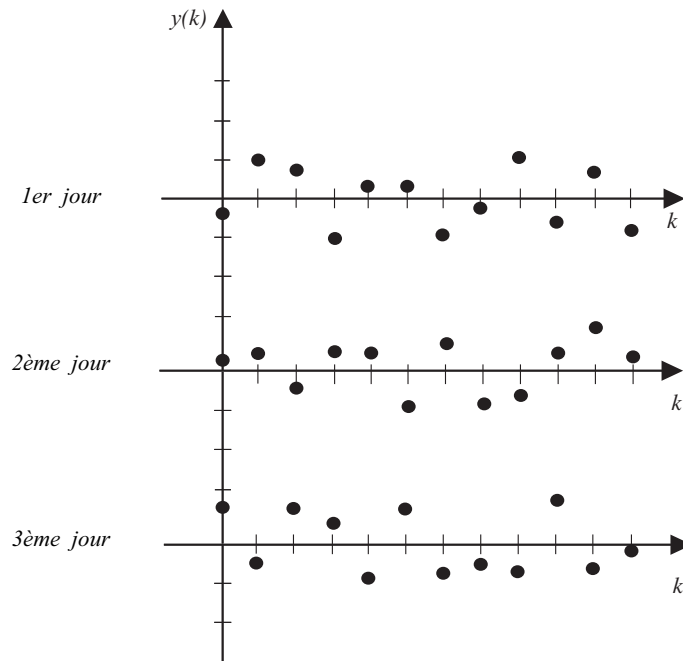


FIG. 2.6 – Enregistrement sur trois jours d'une variable régulée.

et en considérant la propriété (2.28) donnée ci-dessus:

$$R_{uy}(h) \left| \begin{array}{l} \text{ici} \\ (2.18) \end{array} \right. = R_{yu}(h) \left| \begin{array}{l} \text{ailleurs} \\ (2.31) \end{array} \right.$$

### 2.3.3 Fonctions de corrélation pour les signaux aléatoires

Les fonctions de corrélation peuvent être définies pour les signaux aléatoires. Un signal aléatoire ou stochastique est un signal qui ne peut pas être décrit de façon déterministe car non reproductible. On peut tout au plus associer une probabilité pour une valeur ou un groupe de valeurs du signal.

A titre d'exemple, considérons la sortie d'un processus régulé autour d'une valeur de consigne sur un horizon de plusieurs heures et pendant plusieurs jours (fig. 2.6). L'évolution de la sortie peut être décrite par une fonction déterministe  $y(k)$ , mais cette fonction sera différente de jour en jour. A une heure donnée, on mesurera chaque jour une autre valeur de la sortie. Pour l'ensemble des valeurs mesurées tous les jours à la même heure, on peut définir une statistique caractérisée par une valeur moyenne et un écart-type.

Sur un plan formel, l'évolution de la sortie représente un **processus stochastique** (ou aléatoire) que l'on peut décrire comme une fonction de deux arguments  $y(k, \xi)$  où  $k$  représente le temps discret et  $\xi$  la variable stochastique qui appartient à un espace de probabilité. Pour une valeur  $\xi = \xi_0$ , la fonction  $y(k, \xi_0)$  est une fonction du temps appelé **réalisation** (dans notre exemple, l'évolution de la sortie pour un

jour particulier). Pour une valeur fixe  $k = k_0$ , la fonction  $y(k_0, \xi)$  est une **variable aléatoire** (dans notre exemple, la valeur de la sortie à une heure fixe). L'argument  $\xi$  est souvent omis et donc le processus stochastique s'écrit simplement  $y(k)$ .

Si les statistiques sur une réalisation sont représentatives du processus stochastique, celui-ci est dit **ergodique**. De plus, si le processus stochastique est **gaussien**, la connaissance de la valeur moyenne et de l'écart-type suffisent à préciser la probabilité d'apparition d'une valeur.

La valeur moyenne et la fonction d'autocorrélation du signal aléatoire  $x(k)$  sont définies par (en assumant que  $x(k)$  est ergodique):

$$E\{x(k)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \quad (2.32)$$

$$R_{xx}(h) = E\{x(k)x(k+h)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)x(k+h) \quad (2.33)$$

Pour un nombre fini mais suffisamment grand de données  $N$ , la valeur moyenne et la fonction d'autocorrélation peuvent être estimées comme suit:

$$E\{x(k)\} \cong \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \quad (2.34)$$

$$R_{xx}(h) \cong \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-h-1} x(k)x(k+h) \quad (2.35)$$

L'estimation de la fonction d'autocorrélation dans ce cas est dite *biaisée*, car la sommation se fait sur  $N - h$  termes mais la division sur  $N$ . Une estimation *non biaisée* peut être obtenue par:

$$R_{xx}(h) \cong \frac{1}{N-h} \sum_{k=0}^{N-h-1} x(k)x(k+h) \quad (2.36)$$

Cette estimation est non biaisée mais a une très grande variance si  $N - h$  est petit, car dans ce cas, l'estimation de la fonction d'autocorrélation est basée sur un petit nombre de données.

Pour les variables aléatoires  $x(k)$  et  $y(k)$ , la fonction d'intercorrélacion est définie comme suit:

$$R_{xy}(h) = E\{x(k)y(k+h)\}. \quad (2.37)$$

Si  $x(k)$  et  $y(k)$  sont indépendants, on a:

$$R_{xy}(h) = E\{x(k)\}E\{y(k+h)\}. \quad (2.38)$$

et si  $x(k)$  et  $y(k)$  sont indépendants et de valeur moyenne nulle, on aura:

$$R_{xy}(h) = E\{x(k)y(k+h)\} = 0 \quad \forall h \quad (2.39)$$



Une estimation biaisée de la fonction d'intercorrélation pour les signaux ergodiques  $x(k)$  et  $y(k)$  est donnée par:

$$R_{xy}(h) = E\{x(k)y(k+h)\} \cong \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-h-1} x(k)y(k+h), \quad (2.40)$$

et une estimation non biaisée par:

$$R_{xy}(h) = E\{x(k)y(k+h)\} \cong \frac{1}{N-h} \sum_{k=0}^{N-h-1} x(k)y(k+h), \quad (2.41)$$

### 2.3.3.1 Bruit blanc discret

La plupart des perturbations aléatoires peuvent être décrites comme un **bruit blanc discret** appliqué à un filtre. Le bruit blanc discret est un signal aléatoire qui possède une énergie uniformément répartie entre toutes les pulsations comprises entre 0 et  $\pi$ . Un bruit blanc discret ainsi que son autocorrélation et sa densité spectrale sont illustrés à la figure 2.7.

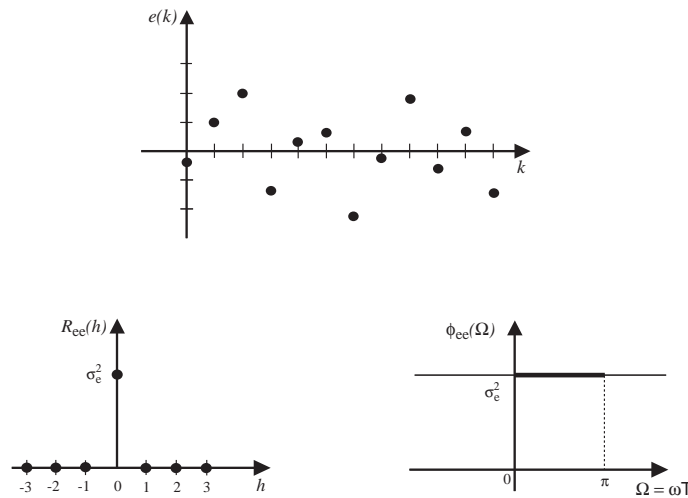


FIG. 2.7 – Bruit blanc discret  $e(k)$  avec son autocorrélation  $R_{ee}(h)$  et sa densité spectrale  $\varphi_{ee}(\Omega)$ .

Nous considérerons par la suite comme signal générateur le bruit blanc de valeur moyenne nulle  $e(k)$  avec les propriétés suivantes:

$$E\{e(k)\} = 0 \quad \forall k \quad (2.42)$$

$$R_{ee}(h) = E\{e(k)e(k+h)\} = \begin{cases} \sigma_e^2 & \text{pour } h = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.43)$$

Ces propriétés ne définissent pas entièrement le signal car  $e(k)$  peut suivre différentes distributions (uniforme, normale ou gaussienne, etc.) Dans la pratique, on utilisera

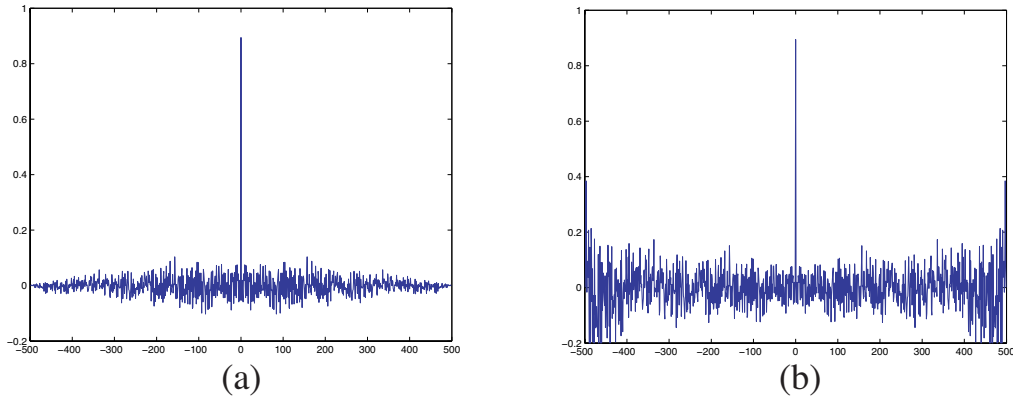


FIG. 2.8 – L'estimation biaisée (a) et non biaisée (b) de la fonction d'autocorrélation d'une réalisation du bruit blanc discret avec 500 données.

le plus souvent la distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$ . Pour un nombre fini de données, seule une estimation de la fonction d'autocorrélation peut être obtenue. La figure 2.8 illustre l'estimation biaisée et non biaisée de la fonction d'autocorrélation d'une réalisation du bruit blanc discret avec 500 données.

Notons que le bruit blanc discret possède une réalisation physique car il s'agit d'un signal à énergie finie (la bande de fréquences est finie). Par contre, le bruit blanc continu dont l'autocorrélation vaut  $R_{uu}(\tau) = C\delta(\tau)$  est un signal hypothétique et ne correspond pas à une réalité physique car l'énergie ne peut pas être infinie (dans une bande de fréquences infinie).

Avec un bruit blanc discret, toutes les fréquences sont d'égale importance (tout comme dans la lumière blanche). Les filtres qui constitueront les modèles de perturbation aléatoires modifieront le spectre fréquentiel pour obtenir une répartition correspondant à la répartition fréquentielle de l'énergie des perturbations rencontrées (tout comme la lumière colorée!).

### 2.3.3.2 Bruit coloré discret

Un bruit coloré est un bruit qui n'est pas blanc! C'est-à-dire que sa fonction d'autocorrélation n'est pas nulle pour tout  $h \neq 0$ . Un bruit blanc filtré est un bruit coloré. Considérons un processus MA (moving average ou moyenne ajustée) où le bruit est modélisé comme:

$$n(k) = (1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_c}q^{-n_c})e(k) = C(q^{-1})e(k) \quad (2.44)$$

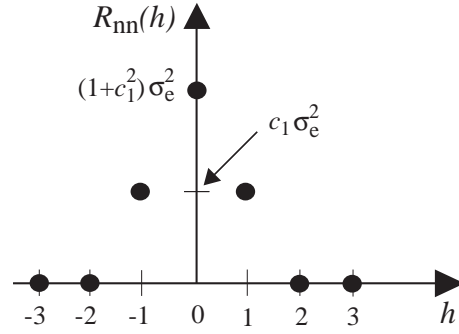


FIG. 2.9 – Fonction d'autocorrélation pour un processus MA du premier ordre.

c'est-à-dire un bruit blanc discret de moyenne nulle filtré par le polynôme  $C(q^{-1})$ . A titre d'exemple pour  $n_c = 1$  la moyenne et variance de  $n(k)$  peuvent s'écrire:

$$\begin{aligned}
 E\{n(k)\} &= E\{(1 + c_1q^{-1})e(k)\} = E\{e(k) + c_1e(k-1)\} \\
 &= E\{e(k)\} + c_1E\{e(k-1)\} = 0 \\
 E\{n(k)n(k)\} &= E\{[e(k) + c_1e(k-1)]^2\} \\
 &= E\{e^2(k)\} + c_1^2E\{e^2(k-1)\} + 2c_1E\{e(k)e(k-1)\}
 \end{aligned}$$

Le troisième terme est nul du fait de la non-corrélation du bruit blanc, ainsi:

$$R_{nn}(0) = E\{n(k)n(k)\} = (1 + c_1^2)\sigma_e^2 \quad (2.45)$$

Pour calculer  $R_{nn}(h)$  pour  $h \neq 0$  on procède comme suit. Pour  $h = 1$ :

$$n(k-1) = e(k-1) + c_1e(k-2) \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned}
 R_{nn}(1) &= E\{n(k)n(k-1)\} = E\{[e(k) + c_1e(k-1)][e(k-1) + c_1e(k-2)]\} \\
 &= E\{e(k)e(k-1)\} + c_1E\{e(k)e(k-2)\} + c_1E\{e(k-1)e(k-1)\} \\
 &\quad + c_1^2E\{e(k-1)e(k-2)\} = c_1\sigma_e^2 \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

car le premier, le deuxième et la quatrième terme sont nuls. On vérifie que pour  $|h| > 1$ ,  $R_{nn}(h) = 0$ , ce qui permet d'obtenir le graphe d'autocorrélation de la figure 2.9.

### 2.3.4 Relation entre $R_{uu}(h)$ , $R_{uy}(h)$ et $g(h)$

Pour un système discret lsc on peut écrire:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)u(k-j) + d(k) \quad (2.48)$$

Supposons que l'entrée  $u(k)$  est un signal aléatoire et indépendante de la perturbation  $d(k)$ . En multipliant les deux côtés de l'équation ci-dessus par  $u(k+h)$  et en prenant l'espérance mathématique, on obtient:

$$E\{y(k)u(k+h)\} = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)E\{u(k-j)u(k+h)\} + E\{d(k)u(k+h)\} \quad (2.49)$$

On remplace les espérances mathématiques avec les fonctions de corrélation correspondantes, ce qui permet d'écrire:

$$R_{yu}(h) = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)R_{uu}(j+h) + R_{du}(h) \quad (2.50)$$

Si au moins l'un des signaux  $d(k)$  et  $u(k)$  est de valeur moyenne nulle, on a:

$$R_{du}(h) = 0 \quad \forall h \quad (2.51)$$

et on peut écrire à partir de l'équation (2.28):

$$R_{uy}(h) = R_{yu}(-h) = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)R_{uu}(j-h) = g(h) * R_{uu}(h) \quad (2.52)$$

Il faut mentionner qu'on peut toujours enlever la composante continue du signal d'entrée pour respecter la condition sur la valeur moyenne nulle de ce signal. Donc, l'intercorrélation des signaux d'entrée et de sortie est égale au produit de convolution de l'autocorrélation du signal d'entrée avec la réponse impulsionnelle du système.

Remarquons que les signaux d'entrée et de sortie sont liés entre eux par la relation (2.14), c'est-à-dire:

$$y(k) = g(k) * u(k) + d(k) \quad (2.53)$$

L'utilisation des fonctions de corrélation permet donc d'éliminer l'effet du bruit dans le produit de convolution. Cela sera très utile pour calculer  $g(k)$  par déconvolution numérique.

Dans le domaine fréquentiel, l'équation (2.52) donne:

$$\phi_{uy}(\omega T) = G(e^{j\omega T})\phi_{uu}(\omega T) \quad (2.54)$$

où  $\phi_{uy}(\omega T)$  et  $\phi_{uu}(\omega T)$  sont les transformées de Fourier discrets des signaux temporels  $R_{uy}(h)$  et  $R_{uu}(h)$  ( $T$  est la période d'échantillonnage).

### 2.3.5 Calcul de la réponse impulsionnelle

Suivant le type du signal d'entrée, on distingue les deux cas suivants:

### 2.3.5.1 $u(k)$ est un bruit blanc

A partir de l'autocorrélation de l'entrée  $R_{uu}(h) = R_{uu}(0)\delta(h)$ , on obtient:

$$R_{uy}(h) = R_{uu}(0)\delta(h) * g(h) = R_{uu}(0)g(h) \quad (2.55)$$

car l'impulsion unité représente l'élément neutre du produit de convolution, c'est-à-dire  $g(h) * \delta(h) = g(h)$ . Il s'ensuit:

$$g(h) = \frac{R_{uy}(h)}{R_{uu}(0)} \quad (2.56)$$

Ainsi, si un système lsc est excité par un bruit blanc d'autocorrélation  $R_{uu}(0)\delta(h)$ , et que la perturbation est indépendante de l'excitation, la réponse impulsionnelle  $g(h)$  est obtenue directement à partir de l'intercorrélation  $R_{uy}(h)$ .

### 2.3.5.2 $u(k)$ est quelconque

La relation de convolution

$$R_{uy}(h) = R_{uu}(h) * g(h) \quad (2.57)$$

reste valable et, par rapport au produit de convolution  $y(k) = u(k) * g(k)$ , le couple  $[u(k), y(k)]$  a été remplacé par le couple équivalent  $[R_{uu}(h), R_{uy}(h)]$ . Pour les signaux d'entrée de nature aléatoire ou pseudo-aléatoire (souvent utilisés pour l'identification de systèmes dynamiques), la longueur des enregistrements pour le couple équivalent est beaucoup plus petite que celle des signaux d'entrée et de sortie. De plus, l'effet d'un bruit non corrélé avec l'entrée peut être éliminé en utilisant les fonctions de corrélation, ce qui n'est bien sûr pas le cas avec les signaux originaux. Cependant, le problème de déconvolution, c'est-à-dire celui du calcul de  $g(h)$  à partir de  $R_{uu}(h)$  et  $R_{uy}(h)$ , demeure. On peut le résoudre de plusieurs façons.

a) Déconvolution numérique

En considérant (2.57), on a:

$$R_{uy}(h) = \sum_{j=0}^{\infty} R_{uu}(h-j)g(j) \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (2.58)$$

qui représente un système d'équations algébriques de dimension infinie avec les inconnues  $g(0), g(1), \dots, g(\infty)$ . Remarquons que, à la différence de l'équation (2.1), la sommation de l'équation (2.58) contient une infinité de termes. Cependant, comme la réponse impulsionnelle pour les systèmes stables et sans intégrateur tend rapidement vers zéro, le nombre de termes peut être limité sans trop d'erreur. Considérons à titre d'approximation, une réponse impulsionnelle *finie* contenant  $K$  termes:

$$R_{uy}(h) = \sum_{j=0}^{K-1} R_{uu}(h-j)g(j) \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (2.59)$$

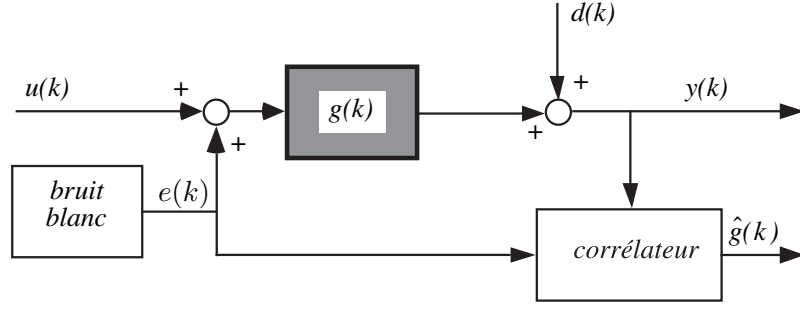


FIG. 2.10 – Méthode de corrélation avec ajout du signal d'excitation blanc  $e(k)$ .

c'est-à-dire avec  $g(j) = 0$  pour  $j \geq K$ .

En écrivant l'équation (2.59) pour les valeurs  $h = 0, 1, \dots, N-1$  avec  $N \geq K$ , et en considérant que  $R_{uu}(-h) = R_{uu}(h)$ , on obtient:

$$\begin{bmatrix} R_{uy}(0) \\ R_{uy}(1) \\ \vdots \\ R_{uy}(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & \cdots & R_{uu}(K-1) \\ R_{uu}(1) & R_{uu}(0) & \cdots & R_{uu}(K-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{uu}(N-1) & R_{uu}(N-2) & \cdots & R_{uu}(N-K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(K-1) \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

ou sous forme matricielle:

$$\begin{matrix} r \\ (N \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} R_K & g_K \\ (N \times K) & (K \times 1) \end{matrix} \quad (2.61)$$

L'équation (2.61) est structurellement similaire à l'équation (2.9). Si  $\text{rang}(R_K) = K$ , elle peut être résolue dans le sens des moindres carrés pour produire  $K$  valeurs discrètes de la réponse impulsionnelle:

$$g_K = R_K^+ r \quad (K \times N) \quad (2.62)$$

où  $R_K^+ = (R_K^T R_K)^{-1} R_K^T$  représente la matrice pseudo-inverse de  $R_K$  (cf. annexe B).

#### b) Ajout d'un signal d'excitation blanc

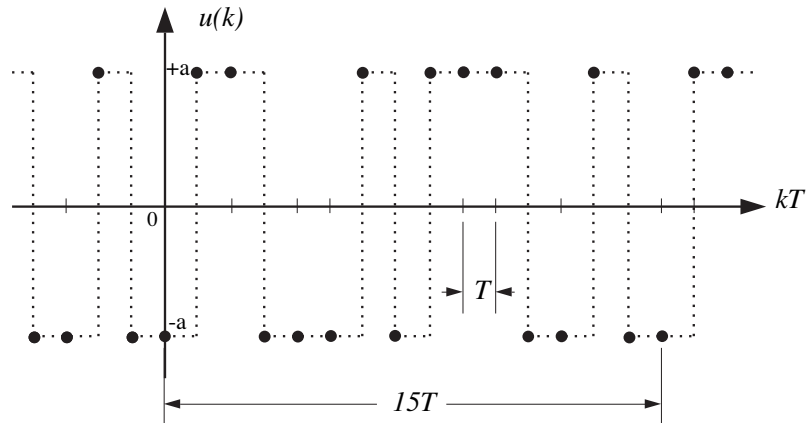
Si le signal d'entrée  $u(k)$  n'est pas blanc, il est possible de lui superposer un signal d'excitation blanc,  $e(k)$ . Le schéma de principe de la figure 2.5 devient alors celui indiqué à la figure 2.10.

Comme le système  $g(k)$  est lsc, la sortie  $y(k)$  peut s'écrire:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)u(k-j) + \sum_{j=0}^{\infty} g(j)e(k-j) + d(k) \quad (2.63)$$

De manière similaire à l'équation (2.50), on a:

$$R_{ye}(h) = \sum_{j=0}^{\infty} R_{ue}(h+j)g(j) + \sum_{j=0}^{\infty} R_{ee}(h+j)g(j) + R_{de}(h) \quad (2.64)$$

FIG. 2.11 – Signal binaire pseudo-aléatoire de période  $\theta = 15T$ .

Si le signal  $e(k)$  est de valeur moyenne nulle et est non corrélé avec  $u(k)$  et  $d(k)$ , on obtient après simplification:

$$R_{ey}(h) = R_{ee}(h) * g(h) \quad (2.65)$$

et pour  $R_{ee}(h) = R_{ee}(0)\delta(h)$ :

$$g(h) = \frac{R_{ey}(h)}{R_{ee}(0)} \quad (2.66)$$

## 2.3.6 Excitation pseudo-aléatoire

### 2.3.6.1 Propriétés

La section précédente a montré l'intérêt d'exciter le système par un bruit blanc afin d'obtenir directement la réponse impulsionnelle à partir du calcul de  $R_{uy}(h)$ . Bien qu'omniprésent, le bruit blanc est difficile à capter et à injecter dans un système en conservant son spectre.

Les signaux pseudo-aléatoires, générés pour approcher un bruit blanc, sont des signaux périodiques et parfaitement déterminées (déterministes) mais qui, pour un observateur non averti, pourraient sembler évoluer sous l'effet du hasard.

Considérons à titre d'exemple un signal binaire pseudo-aléatoire (SBPA) de période  $\theta = 15T$ , où  $T$  est la période d'échantillonnage (2.11).

La figure 2.12 illustre la fonction d'autocorrélation de ce signal pseudo-aléatoire, laquelle présente également une périodicité de  $\theta = 15T$ . Dans cet exemple,  $\theta = (2^n - 1)T$  où  $n = 4$  représente la longueur du registre à décalage décrit au paragraphe suivant.

Lorsque l'on utilise une excitation pseudo-aléatoire pour identifier un système dynamique, il est nécessaire de vérifier certaines conditions d'expérimentation afin d'obtenir une estimation fiable de la réponse impulsionnelle:

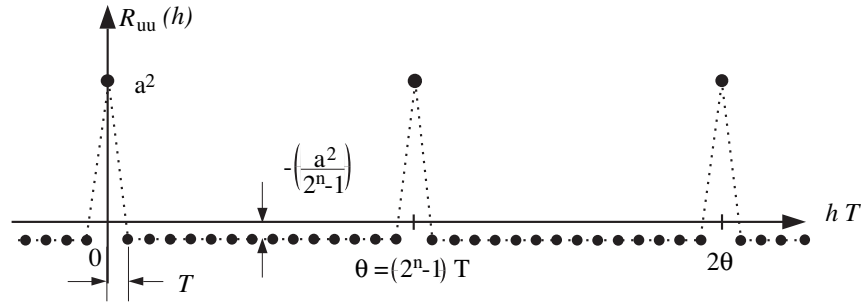


FIG. 2.12 – Fonction d'autocorrélation du SBPA de la figure 2.11

TAB. 2.1 – Les éléments à additionner pour les différentes longueurs du registre à décalage  $n$ 

Longueur du registre $n$	3	4	5	6	7	8	9
Les éléments à additionner	$2 \oplus 3$	$1 \oplus 4$	$2 \oplus 5$	$1 \oplus 6$	$1 \oplus 7$	$1 \oplus 2 \oplus 7 \oplus 8$	$4 \oplus 9$

- Il faut prévoir une période  $\theta$  supérieure au temps d'extinction des transitoires de la réponse impulsionnelle  $g(h)$ . En effet, la convolution de  $R_{uu}(h)$  avec  $g(h)$  (cf. équation 2.57) produit des répliques de  $g(h)$  avec une périodicité  $\theta$  (fig.2.12). Ce phénomène, analogue à celui du recouvrement de spectre dans le domaine fréquentiel, cause des distorsions si  $\theta$  est inférieur au temps d'extinction de la réponse impulsionnelle.
- Il faut choisir  $T$  suffisamment petit et  $n$  suffisamment grand pour que  $R_{uu}(h)$  puisse être assimilé à une impulsion de courte durée.
- Il faut effectuer le calcul sur un nombre entier de périodes  $\theta$ , c'est-à-dire  $t_2 - t_1 = p\theta$ ,  $p$  entier, où  $t_1$  et  $t_2$  représentent respectivement le début et la fin de l'expérimentation. On minimisera ainsi les erreurs dues au fait que l'on considère des signaux de durée limitée (cf. l'extension périodique d'un signal en rapport avec la transformation de Fourier discrète, annexe A.6).

**Remarque :** Si  $u(k)$  est périodique,  $y(k)$  l'est aussi. *Pourquoi?*

La périodicité attendue de  $y(k)$  peut être examinée lors de la visualisation des mesures. Les grandes perturbations accidentelles sont ainsi facilement détectées.

### 2.3.6.2 Génération de signaux binaires pseudo-aléatoires

Nous proposons deux méthodes simples pour générer un SBPA.

- La réalisation expérimentale d'un SBPA se base sur l'utilisation d'un registre à décalage de longueur  $n$  dont le contenu est décalé vers la droite à chaque coup d'horloge. Le nouvel élément qui sera inséré à gauche est obtenu par une addition modulo 2 de deux (ou plus) éléments distincts du registre, comme illustré à la figure 2.13. Le tableau 2.1 présente les éléments à additionner pour les différentes longueurs du registre à décalage  $n$ .

La seule condition à respecter est de ne pas commencer avec un mot nul dans



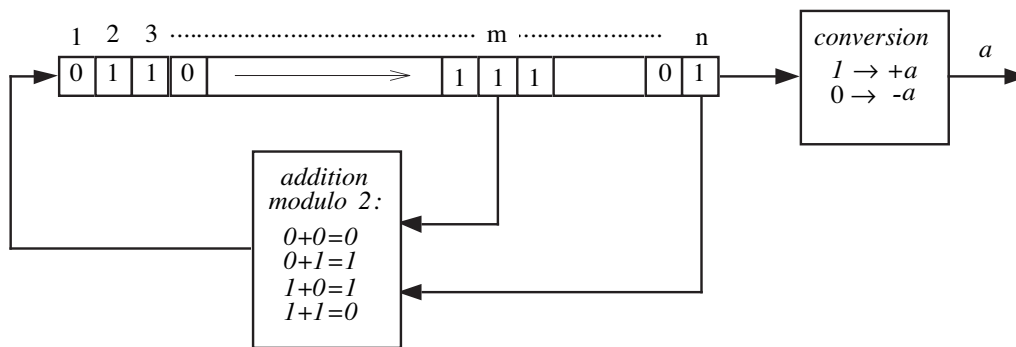


FIG. 2.13 – Génération de SBPA à l'aide d'un registre à décalage.

TAB. 2.2 –  $u(k)$  obtenu à partir du signe de plusieurs réalisations de la variable aléatoire  $x$ .

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$x(k)$	-0.31	-0.89	0.54	-0.19	0.13	0.73	0.05	-0.61	-0.23	0.43	-0.13	...
$u(k)$	-a	-a	a	-a	a	a	a	-a	-a	a	-a	...

le registre, auquel cas la procédure ne générera que des zéros.

La forme du signal est déterminée par le mot initial dans le registre. Le signal généré est périodique car le registre ne peut prendre qu'un maximum de  $2^n - 1$  états distincts et différents de zéro. Après un certain temps, le circuit retrouvera donc nécessairement son état initial à partir duquel il répétera la même séquence.

- Il est également possible de choisir la valeur du signal binaire ( $\pm a$ ) sur la base du signe d'une variable aléatoire obtenue à partir d'une distribution symétrique de moyenne nulle. Le tableau 2.2 présente les valeurs du signal  $u(k)$  obtenu à partir du signe des réalisations  $x(k)$  de la variable aléatoire  $x$  distribuée uniformément dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

*Comparer à l'aide de Matlab les spectres de puissance du SBPA généré à l'aide d'un registre à décalage et obtenu à partir de la réalisation d'une variable aléatoire.*

## 2.4 MÉTHODES FRÉQUENTIELLES

La représentation dans le diagramme de Bode (ou de Nyquist) d'un système dynamique constitue un modèle non paramétrique de nature fréquentielle.

Il existe plusieurs approches de modélisation fréquentielle selon le type de signal injecté dans le système et la façon de traiter les mesures: analyse harmonique, analyse par transformation de Fourier, analyse spectrale. Les avantages et inconvénients de ces approches sont explicités dans les paragraphes suivants.

### 2.4.1 Analyse harmonique

La représentation d'un système dynamique dans le diagramme de Bode s'obtient en reportant le rapport des amplitudes des signaux sinusoïdaux d'entrée et de sortie et leur déphasage en fonction de la pulsation  $\omega$  en *régime permanent*. Pour les systèmes dynamiques continus, la substitution  $s = j\omega$  donne  $G(j\omega)$  comme illustré à la figure 2.14. Pour les systèmes discrets, la substitution  $z = e^{j\omega T}$  donne  $G(e^{j\omega T})$ . On

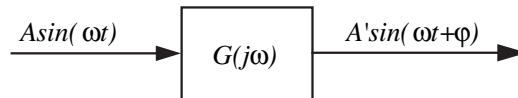


FIG. 2.14 – Système dynamique en régime permanent.

utilisera souvent  $G(j\omega)$  pour les développements théoriques (systèmes continus) et  $G(e^{j\omega T})$  pour les implantations pratiques (systèmes discrets) car les signaux disponibles dans l'ordinateur sont de nature numérique. Le contexte indiquera s'il s'agit de la réponse harmonique du système continu ou discret. Le rapport des amplitudes et le déphasage s'expriment comme suit:

$$R_A(\omega) = \frac{A'}{A} = |G(j\omega)| \quad \text{rapport d'amplitude} \quad (2.67)$$

$$\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega)] \quad \text{déphasage} \quad (2.68)$$

Il est souvent difficile d'obtenir  $G(j\omega)$  théoriquement. Une alternative consiste à effectuer des relevés expérimentaux.

La procédure, illustrée à la figure 2.15, est la suivante:

- exciter le système à l'aide d'une entrée sinusoïdale de pulsation  $\omega$ ,
- attendre l'établissement du régime permanent,
- mesurer  $R_A(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$ ,
- répéter les étapes précédentes pour plusieurs pulsations et représenter les mesures expérimentales dans le diagramme de Bode.

Le résultat aura l'allure indiquée à la figure 2.16.

Les recommandations suivantes sont utiles :

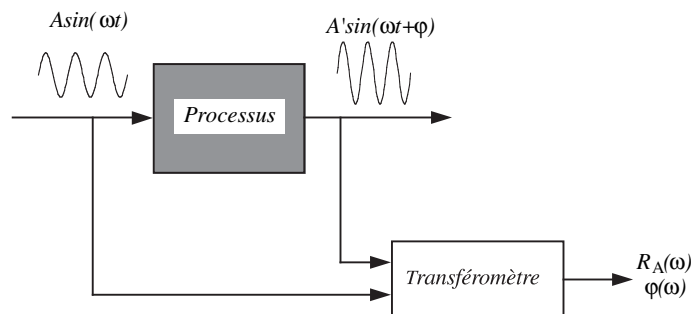


FIG. 2.15 – Procédure permettant de calculer  $R_A(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$ .

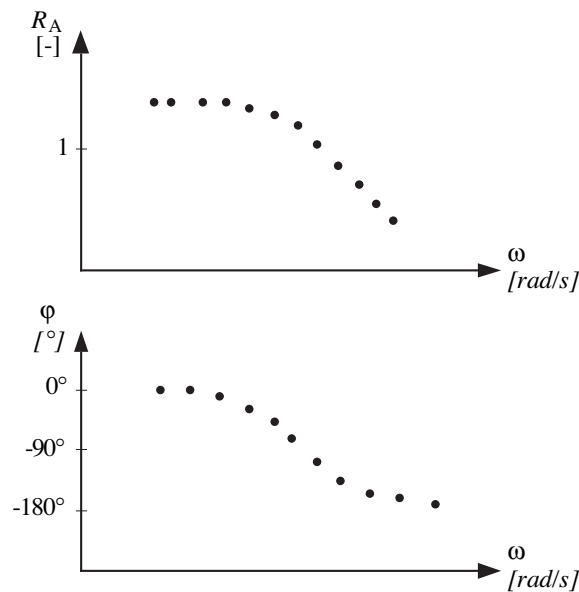


FIG. 2.16 – Diagramme de Bode expérimental.

- la plage des fréquences doit, en général, couvrir au minimum 2 à 3 décades, avec une dizaine de points de mesure par décade,
- l'amplitude du signal d'entrée dépend de la précision avec laquelle on peut mesurer le signal de sortie (ceci afin d'obtenir un rapport signal-sur-bruit élevé) et de la non-linéarité du système.

Cette méthode présente les avantages suivants :

- l'approche est simple et intuitive,
- l'expérimentateur n'a besoin que de peu de connaissances préalables du système (plage des fréquences, amplitude du signal d'entrée).

Les inconvénients sont principalement liés au fait que la méthode nécessite une expérimentation longue, car :

- il faut étudier de nombreuses fréquences,
- il est nécessaire d'attendre le régime permanent avant chaque mesure, c'est-à-dire d'attendre 4 à 5  $\tau$ , où  $\tau$  représente la constante de temps dominante du système,
- il faut des signaux d'excitation avec une grande période afin de bien identifier le système à basses fréquences,
- le niveau de bruit peut nécessiter une répétition des expériences ou une observation des signaux sur un grand nombre de périodes.

Il s'ensuit que l'analyse harmonique est une méthode mal adaptée aux systèmes possédant des constantes de temps de l'ordre de la minute ou plus.

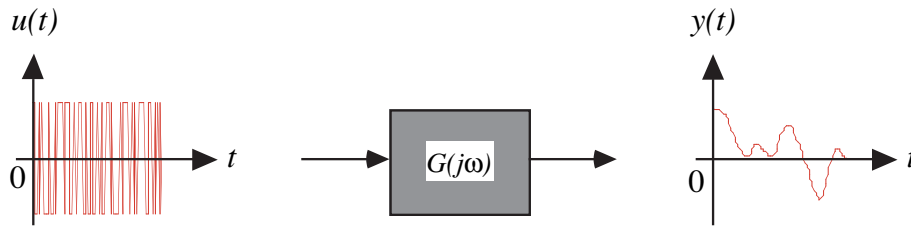


FIG. 2.17 – Système dynamique excité par un signal d'entrée binaire pseudo-aléatoire.

## 2.4.2 Analyse par transformation de Fourier

### 2.4.2.1 Principe

L'idée de cette approche est d'exciter le processus avec un signal contenant simultanément de nombreuses fréquences et d'effectuer une analyse du contenu fréquentiel des signaux d'entrée et de sortie (fig. 2.17). Une telle analyse peut être réalisée à l'aide de la transformation de Fourier, le rapport des signaux transformés de sortie et d'entrée donnant la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

A partir de la transformée de Fourier des signaux d'entrée et de sortie (cf. annexe A):

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.69)$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.70)$$

il est possible d'évaluer la réponse harmonique du système:

$$G(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} \quad (2.71)$$

#### Remarques :

- La transformée de Fourier n'est, en principe, définie que pour des fonctions temporelles  $f(t)$  sommables en valeur absolue sur  $(-\infty, \infty)$ , c'est-à-dire seulement si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (2.72)$$

Cependant, si cette condition est suffisante, elle n'est pas nécessaire. On démontre que tous les signaux physiquement réalisables possèdent une transformée de Fourier.

- Il existe trois considérations importantes relatives au calcul de la réponse harmonique par transformation de Fourier des signaux d'entrée et de sortie:
  1. Comme il n'est pas possible d'intégrer dans l'intervalle  $(-\infty, \infty)$ , il faut nécessairement intégrer entre des bornes temporelles finies, ce qui introduit des **erreurs de troncature**.

2. Comme on utilise un microprocesseur pour traiter les signaux et effectuer les intégrations, il faut tenir compte des questions liées à l'**échantillonnage** des signaux. On évaluera alors  $G(e^{j\omega T})$  plutôt que  $G(j\omega)$ .
3. Un problème majeur est celui de la sensibilité de la fonction de transfert estimée aux **erreurs de mesure** ou aux perturbations.

Ces trois considérations sont abordées ci-dessous.

### 2.4.2.2 Erreurs de troncature

Soit le signal  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ , avec  $t \in (-\infty, \infty)$ . Sa transformée de Fourier est donnée par (cf. tableau A.1, annexe A):

$$X(\omega) = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \quad (2.73)$$

La réduction de l'intervalle d'intégration, par exemple entre  $-\theta$  et  $\theta$ , revient à considérer le signal

$$z(t) = x(t)f(t) \quad (2.74)$$

où  $f(t)$  représente le signal rectangulaire de la figure 2.18.

**Remarque :** L'instant  $t = 0$  est choisi comme le milieu de l'intervalle temporel disponible afin de simplifier l'expression de la transformée de Fourier de la fenêtre. Si l'on désire travailler avec un intervalle temporel strictement positif, on peut alors utiliser la propriété liée au décalage temporel (cf. tableau A.2, annexe A).

Comme la transformée de Fourier d'un produit de fonctions temporelles est égale au produit de convolution des transformées de Fourier de ces fonctions (cf. tableau A.2, annexe A), on obtient pour  $Z(\omega)$  qui représente l'approximation de  $X(\omega)$  due à la restriction du domaine d'intégration:

$$Z(\omega) = \mathcal{F}\{z(t)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\theta}^{\theta} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.75)$$

$$= \mathcal{F}\{x(t)f(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)F(\omega - \nu) d\nu \quad (2.76)$$

La transformée de Fourier du signal rectangulaire

$$f(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2\theta}\right) \quad (2.77)$$

est (cf. annexe A):

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega\theta) = 2\theta \text{sinc}(\omega\theta) \quad (2.78)$$

Les transformées de Fourier de ces signaux sont données à la figure 2.19. Si la fenêtre s'agrandit indéfiniment, on obtient:

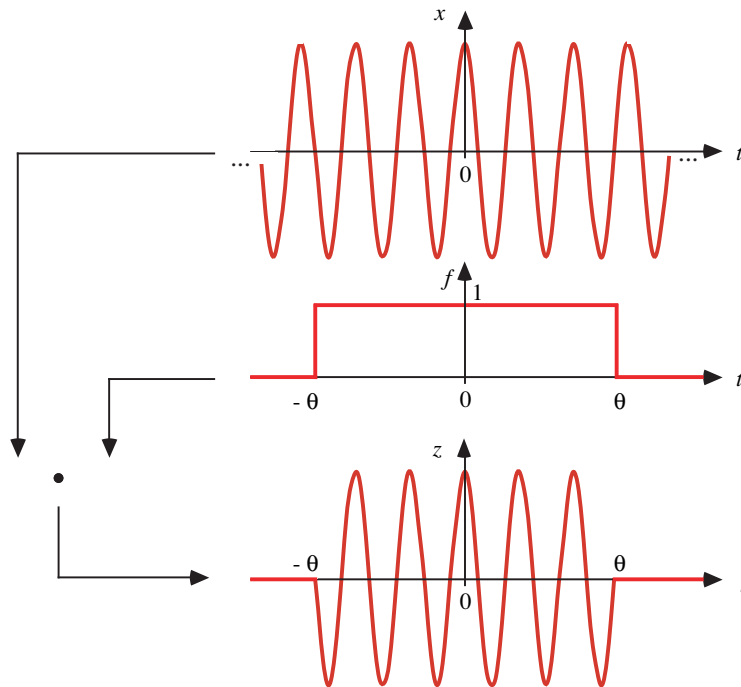


FIG. 2.18 – Relation entre les signaux temporels  $x(t)$ ,  $f(t)$  et  $z(t) = x(t)f(t)$ .

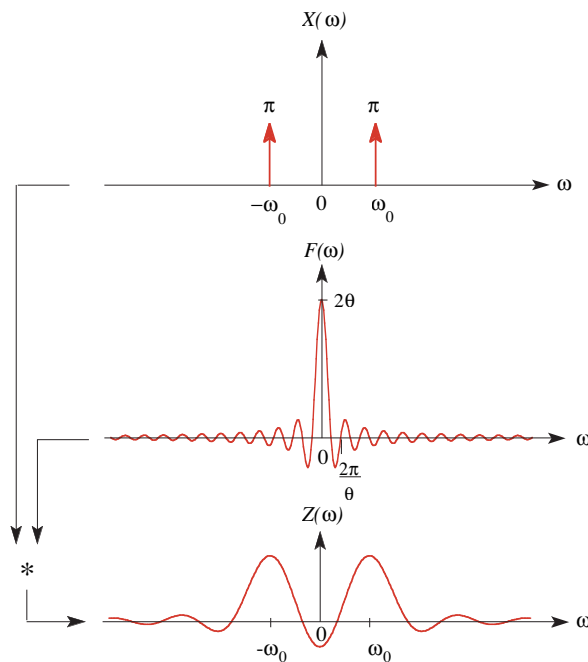


FIG. 2.19 – Transformées de Fourier des signaux  $x(t)$ ,  $f(t)$  et  $z(t)$ .

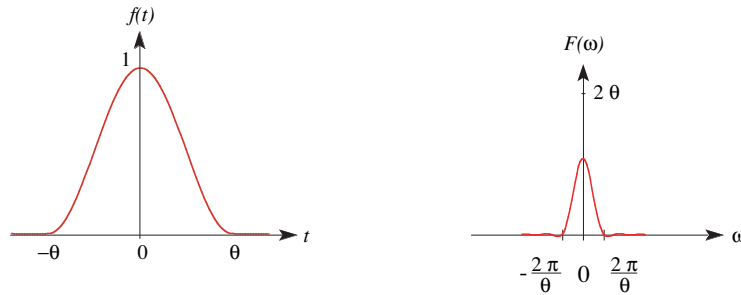


FIG. 2.20 – Fenêtre temporelle de Hann et transformée de Fourier correspondante.

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} F(\omega) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{2}{\omega} \sin(\omega\theta) = 2\pi\delta(\omega) \quad (2.79)$$

et l'équation (2.76) donne:

$$Z(\omega) = X(\omega) \quad (2.80)$$

car l'impulsion de Dirac représente l'élément neutre du produit de convolution. La fenêtre «idéale» possède donc la transformée de Fourier donnée par l'équation (2.79). La fenêtre rectangulaire dont la transformée de Fourier est donnée à la figure 2.19 est assez éloignée de ce cas idéal: la largeur du lobe principal entraîne une perte de résolution de  $Z(\omega)$  due à un effet de lissage local propre au produit de convolution (2.76). Les lobes secondaires, non négligeables, contiennent de l'information qui sera injectée à des fréquences plus distantes (on parle alors de leakage ou fuite); de plus, les valeurs négatives produisent des oscillations de  $Z(\omega)$ . Il est possible, en modifiant la forme de la fenêtre, de réduire fortement ces oscillations (ceci au détriment de la résolution). C'est le cas par exemple de la fenêtre de Hann (fig. 2.20):

$$f(t) = \begin{cases} 0.5 \left(1 + \cos \frac{\pi t}{\theta}\right) & \text{pour } t \in [-\theta, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.81)$$

Le tableau (2.3) présente les transformées de Fourier de 4 fenêtres temporelles de largeur  $2\theta$ . On remarque que les fenêtres triangulaire, de Hann et de Hamming ont toutes un lobe principal de largeur double de celle de la fenêtre rectangulaire, ce qui résulte en une perte de résolution. Cependant, ces trois fenêtres possèdent des lobes secondaires nettement plus petits, ce qui réduit fortement les distorsions liées aux problèmes de leakage ou fuite. Si la fenêtre de Hamming possède le plus petit premier lobe secondaire, la hauteur des lobes secondaires décroît le plus rapidement avec la fenêtre de Hann.

### 2.4.2.3 Echantillonnage des signaux

Considérons le signal analogique  $x(t)$  et sa version échantillonnée  $x_e(t)$  exprimée en fonction de la variable continue  $t$ :

$$x_e(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \quad (2.82)$$

TAB. 2.3 – Fenêtres temporelles de largeur  $2\theta$  et transformées de Fourier correspondantes (LLP: largeur du lobe principal; HLS: hauteur relative du premier lobe secondaire).

Fenêtre	Définition sur $[-\theta, \theta]$	Transformée de Fourier	LLP	HLS
Rectangulaire	1	$F(\omega) = 2\theta \operatorname{sinc}(\omega\theta)$	$\frac{2\pi}{\theta}$	21.7%
Triangulaire	$1 - \frac{ t }{\theta}$	$\theta \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)$	$\frac{4\pi}{\theta}$	4.7%
Hann	$0.5[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\theta}\right)]$	$\frac{1}{2}F(\omega) + \frac{1}{4}F\left(\omega + \frac{\pi}{\omega}\right) + \frac{1}{4}F\left(\omega - \frac{\pi}{\omega}\right)$	$\frac{4\pi}{\theta}$	2.7%
Hamming	$0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{\pi t}{\theta}\right)$	$0.54F(\omega) + 0.23F\left(\omega + \frac{\pi}{\omega}\right) + 0.23F\left(\omega - \frac{\pi}{\omega}\right)$	$\frac{4\pi}{\theta}$	0.7%

donnés à la figure 2.21, où  $T$  représente la période d'échantillonnage, c'est-à-dire  $\omega_s = 2\pi/T$ . Les valeurs *temporelles* discrètes sont dénotées ici par  $n$  car  $k$  est réservé, par convention en traitement du signal, pour indexer les valeurs *fréquentielles* discrètes.

La transformée de Fourier du signal échantillonné,  $X_e(\omega)$ , est liée à la transformée de Fourier du signal analogique,  $X(\omega)$ , par la relation suivante (cf. annexe A.5):

$$X_e(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \quad (2.83)$$

Si la condition d'échantillonnage de Shannon est respectée, c'est-à-dire si  $X(\omega)$  est nul pour  $|\omega| > \omega_s/2$ , alors, dans l'intervalle  $[-\omega_s/2, \omega_s/2]$ ,  $X_e(\omega)$  sera identique à  $X(\omega)$  au facteur  $1/T$  près. De plus  $X_e(\omega)$  est périodique de période  $\omega_s$  (figure 2.21).

Sous ces conditions, il est possible de reconstruire  $x(t)$  à partir de  $x_e(t)$  en calculant  $X_e(\omega)$ , en multipliant la partie dans l'intervalle  $[-\omega_s/2, \omega_s/2]$  par  $T$  pour obtenir  $X(\omega)$  et en calculant la transformée de Fourier inverse de cette dernière (fig. 2.21).

Pour avoir la possibilité de reconstruire  $X(\omega)$  à partir de  $X_e(\omega)$ , il est donc nécessaire de choisir la pulsation d'échantillonnage  $\omega_s$  au moins égale à deux fois la plus grande pulsation contenue dans le signal. Dans le cas contraire, il y a recouvrement (ou repliement) de spectre et il devient impossible de reconstruire exactement  $X(\omega)$  à partir de  $X_e(\omega)$ .

*Tracer qualitativement  $|X(\omega)|$  et  $|X_e(\omega)|$  pour le cas où la condition d'échantillonnage de Shannon n'est pas respectée et mettre en évidence le recouvrement spectral.*

En considérant le signal échantillonné non pas en fonction de la variable continue  $t$  (équation 2.82) mais comme un signal numérique, la transformation de Fourier



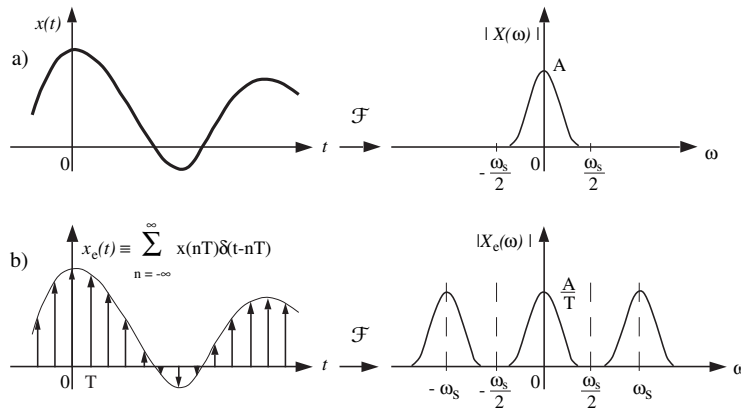


FIG. 2.21 – Signaux analogique (a) et échantillonné (b) avec les transformées de Fourier correspondantes.

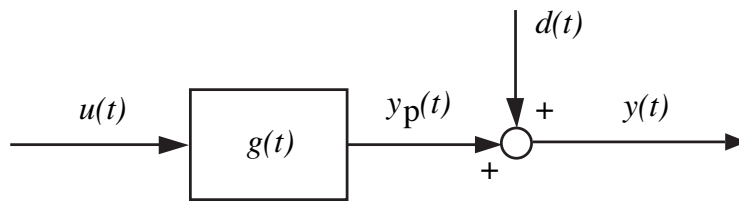


FIG. 2.22 – Système dynamique avec la sortie non bruitée  $y_p(t)$ , la perturbation  $d(t)$  et la sortie mesurée bruitée  $y(t)$ .

pour signaux numériques (cf. annexe A.4) peut être utilisée pour calculer  $X(\Omega)$  avec  $\Omega = \omega T$ . Il est bien évident que  $X_e(\omega) = X(\omega T)$ . La réponse harmonique du système échantillonné s'écrit ainsi:

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{Y(\omega T)}{U(\omega T)} \quad (2.84)$$

#### 2.4.2.4 Erreurs de mesure

La réponse harmonique d'un processus réel est influencée par les perturbations possibles (dérives, bruits de mesure, etc.). Celles-ci sont représentées par la perturbation  $d(t)$  ajoutée à la sortie non bruitée du système (figure 2.22).

Pour un système linéaire et stationnaire, on obtient ainsi:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)u(\tau)d\tau + d(t) \quad (2.85)$$

La propriété de convolution temporelle de la transformation de Fourier (cf. tableau A.2, annexe A) permet d'écrire:

$$Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega) + D(\omega) \quad (2.86)$$

ou encore:

$$\frac{Y(\omega)}{U(\omega)} = G(j\omega) + \frac{D(\omega)}{U(\omega)} \quad (2.87)$$

Si on peut négliger l'effet de la perturbation ( $D(\omega) \cong 0$ ), on obtient l'estimation suivante de la fonction de transfert analogique:

$$G(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} \quad (2.88)$$

ou, pour le système discret:

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{Y(\omega T)}{U(\omega T)} \quad (2.89)$$

Si l'effet de la perturbation  $D(\omega)$  n'est pas négligeable, l'estimation selon (2.88) ou (2.89) sera entâchée d'erreur.

### 2.4.2.5 Implantation numérique

Pour le calcul des transformées de Fourier correspondant aux équations (2.88) et (2.89), on utilise la transformation de Fourier discrète (à  $N$  valeurs d'un signal temporel numérique correspondent  $N$  valeurs fréquentielles, cf. annexe A.6). On obtient ainsi:

$$G(e^{j\omega_k}) = \frac{Y(k)}{U(k)} \quad \omega_k = \frac{k}{N}\omega_s \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.90)$$

La fonction de transfert n'est estimée que pour les  $N$  pulsations  $\omega_k$ . En fait, à cause de la symétrie de  $G(e^{j\omega_k})$  par rapport à  $\omega_N = \omega_s/2$ , il suffit de considérer l'intervalle fréquentiel correspondant à  $k = 0, 1, \dots, N/2$ .

La précision de l'estimation (2.90) dépendra de nombreux facteurs, notamment:

- De l'importance de la perturbation  $d(n)$ , dont l'effet est simplement négligé, par rapport au signal  $y_p(n)$ .
- Du contenu fréquentiel de l'entrée  $u(n)$  aux différentes pulsations  $\omega_k$ , car  $G(e^{j\omega_k})$  est obtenue en divisant  $Y(k)$  par  $U(k)$ . Il s'ensuit que  $G(e^{j\omega_k})$  est souvent très imprécise à fréquences élevées pour lesquelles  $U(k)$  est faible.
- De la nature, périodique ou non, de l'entrée. En effet, si l'entrée est périodique de période  $\theta$  et que l'on augmente le nombre de données disponibles  $N$  selon la relation  $NT = p\theta$  avec  $p$  entier, alors le nombre de grandeurs significatives à estimer ( $G(e^{j\omega_k})$  n'augmente pas, mais leur variance est réduite (cf. fig. A.10 et A.12 dans l'annexe A.6). Si l'entrée n'est pas périodique, en augmentant  $N$  on augmente le nombre de grandeurs à estimer sans améliorer la précision de l'estimation (cf. fig. A.10 et A.14 dans l'annexe A.6). Par conséquent, il est recommandé d'utiliser une entrée *périodique* avec un nombre suffisant de données ( $N$  grand) et choisir les  $p$  dernières périodes afin d'éliminer totalement l'erreur de troncature et de réduire passablement (avec un facteur  $p$ ) l'effet du bruit.

Il est possible d'améliorer l'estimation de  $G(e^{j\omega_k})$  en faisant la moyenne sur plusieurs estimations. Pour le cas de  $m$  estimations indépendantes, on a:

$$\bar{G}(e^{j\omega_k}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m G_i(e^{j\omega_k}) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.91)$$

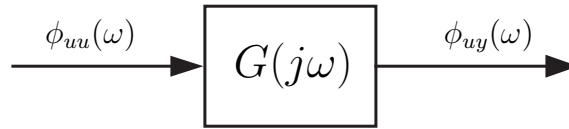


FIG. 2.23 – Système dynamique avec la densité spectrale du signal d’entrée et la densité interspectrale des signaux d’entrée et de sortie. La relation entre  $G$ ,  $\phi_{uu}$  et  $\phi_{uy}$  n’est pas influencée par la perturbation  $d$ .

On introduit au paragraphe suivant la méthode de l’analyse spectrale qui permettra d’améliorer encore sensiblement la qualité de l’estimation par :

- suppression de l’effet de la perturbation  $d(n)$  sur l’identification à l’aide de la méthode de corrélation,
- lissage fréquentiel (on utilise le fait qu’une certaine «corrélation» doit exister entre les estimées à des fréquences voisines).

## 2.4.3 Analyse spectrale

### 2.4.3.1 Principe

Pour le système dynamique perturbé de la figure 2.22, et pour autant que l’entrée  $u(t)$  et la perturbation  $d(t)$  ne soient pas corrélées, la relation de convolution donnée par  $R_{uy}(\tau) = g(\tau) * R_{uu}(\tau)$  et la relation équivalente dans le domaine fréquentiel  $\phi_{uy}(\omega) = G(j\omega)\phi_{uu}(\omega)$  (illustrée à la figure 2.23) sont applicables.

Les grandeurs  $\phi_{uu}(\omega)$  et  $\phi_{uy}(\omega)$  sont appelées respectivement la **densité spectrale** de  $u(t)$  et la **densité interspectrale** de  $u(t)$  et  $y(t)$  et correspondent aux transformées de Fourier des fonctions d’autocorrélation  $R_{uu}(\tau)$  et d’intercorrélacion  $R_{uy}(\tau)$ .

Le principe de l’analyse spectrale consiste à estimer la fonction de transfert par déconvolution dans le domaine fréquentiel pour obtenir :

$$G(j\omega) = \frac{\phi_{uy}(\omega)}{\phi_{uu}(\omega)} \quad (2.92)$$

ou

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{\phi_{uy}(\omega T)}{\phi_{uu}(\omega T)} \quad (2.93)$$

### 2.4.3.2 Implantation numérique

Pour une implantation numérique, il convient de considérer la formulation discrète des fonctions de corrélation et des densités spectrales. Par exemple, la fonction d’intercorrélacion temporelle discrète  $R_{uy}(h)$  se calcule à partir des signaux  $u(n), n = 0, 1, \dots, N - 1$  et  $y(n), n = 0, 1, \dots, 2(N - 1)$ . D’autre part, comme les calculs numériques seront effectués à l’aide de la transformée de Fourier discrète, on supposera que les signaux se continuent périodiquement (avec la période  $N$ ).

On a ainsi pour les signaux périodiques à puissance moyenne finie:

$$R_{uu}(h) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n)u(n+h) \quad h = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.94)$$

$$R_{uy}(h) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n)y(n+h) \quad h = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.95)$$

La densité spectrale  $\phi_{uu}(\omega_k)$  et interspectrale  $\phi_{uy}(\omega_k)$  se calculent respectivement à l'aide de la transformée de Fourier discrète (cf. annexe A.6) de  $R_{uu}(h)$  et  $R_{uy}(h)$ :

$$\phi_{uu}(\omega_k) = \sum_{h=0}^{N-1} R_{uu}(h)e^{-j2\pi kh/N} \quad \omega_k = \frac{k}{N}\omega_s \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.96)$$

$$\phi_{uy}(\omega_k) = \sum_{h=0}^{N-1} R_{uy}(h)e^{-j2\pi kh/N} \quad \omega_k = \frac{k}{N}\omega_s \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.97)$$

La fonction de transfert  $G(e^{j\omega_k})$  est calculés comme suit:

$$G(e^{j\omega_k}) = \frac{\phi_{uy}(\omega_k)}{\phi_{uu}(\omega_k)} \quad (2.98)$$

On peut démontrer qu'en absence du bruit sur la sortie l'implantation numérique par l'équation (2.98) est équivalente à celle de l'équation (2.90). En combinant les équations (2.95) et (2.97), on obtient:

$$\phi_{uy}(\omega_k) = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u(n)y(n+h)e^{-j2\pi kh/N} \quad (2.99)$$

Avec la notation  $s = n+h$ , c'est-à-dire  $h = s-n$ ,  $e^{-j2\pi kh/N}$  devient  $e^{-j2\pi ks/N}e^{j2\pi kn/N}$  et, en inversant les deux sommations:

$$\phi_{uy}(\omega_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n)e^{j2\pi kn/N} \sum_{s=n}^{n+N-1} y(s)e^{-j2\pi ks/N} \quad (2.100)$$

Comme le signal  $y(n)$  est périodique de période  $N$  (en absence du bruit), il suffit de considérer les valeurs numériques  $y(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . On obtient ainsi:

$$\sum_{s=n}^{n+N-1} y(s)e^{-j2\pi ks/N} = \sum_{s=0}^{N-1} y(s)e^{-j2\pi ks/N}$$

et l'équation (2.100) donne:

$$\phi_{uy}(\omega_k) = \frac{1}{N}U(-k)Y(k) \quad (2.101)$$

Les grandeurs  $U(k)$  et  $Y(k)$  sont les transformées de Fourier discrètes des signaux numériques  $u(n)$  et  $y(n)$ .  $U(-k)$  correspond au conjugué complexe de  $U(k)$  car le signal  $u(n)$  est réel.

*Montrer ce dernier point en explicitant  $U(k)$  et son conjugué complexe.*

De manière analogue, on obtient:

$$\phi_{uu}(\omega_k) = \frac{1}{N}U(-k)U(k) \quad (2.102)$$

Ce qui donne:

$$G(e^{j\omega_k}) = \frac{\phi_{uy}(\omega_k)}{\phi_{uu}(\omega_k)} = \frac{U(-k)Y(k)}{U(-k)U(k)} = \frac{Y(k)}{U(k)} \quad (2.103)$$

**Remarque:** Les expressions (2.101) et (2.102) sont souvent indexées  $k = 0, 1, \dots, N/2$  (ou  $(N-1)/2$  si  $N$  est impair), c'est-à-dire uniquement sur la moitié du domaine à cause des symétries suivantes:

$$\phi_{uu}(\omega_k) = \phi_{uu}(\omega_{N-k}) \quad (2.104)$$

$$k = 0, 1, \dots, N/2$$

$$\phi_{uy}(\omega_k) = \phi_{uy}(\omega_{N-k}) \quad (2.105)$$

*Quel est l'effet de conditions initiales non nulles sur le résultat de l'identification (par exemple le fait de ne pas travailler avec des variables écart)?*

### 2.4.3.3 Amélioration de l'estimation par lissage

L'idée est d'améliorer l'estimation de  $\phi_{uu}(\omega_k)$  et  $\phi_{uy}(\omega_k)$  avant de procéder au calcul de  $G(e^{j\omega_k})$ .

Deux approches propres à l'analyse spectrale sont proposées pour réduire cette variabilité: une méthode directe (moyenne sur plusieurs estimations) et une méthode indirecte (lissage fréquentiel).

#### a) Moyenne sur plusieurs estimations

L'idée est de réduire la variabilité de nature aléatoire des densités spectrale et interspectrale  $\phi_{uu}(\omega_k)$  et  $\phi_{uy}(\omega_k)$  en calculant une moyenne sur plusieurs estimations. Pour le cas de  $m$  estimations indépendantes, on a:

$$\bar{\phi}_{uu}(\omega_k) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \phi_{uu,i}(\omega_k) \quad (2.106)$$

$$\bar{\phi}_{uy}(\omega_k) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \phi_{uy,i}(\omega_k) \quad (2.107)$$

et finalement:

$$G(e^{j\omega_k}) = \frac{\bar{\phi}_{uy}(\omega_k)}{\bar{\phi}_{uu}(\omega_k)} \quad (2.108)$$

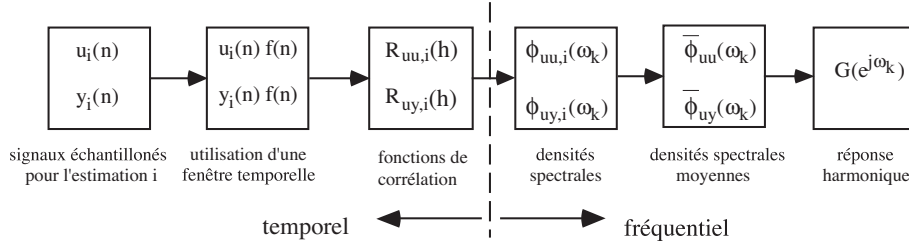


FIG. 2.24 – Etapes de calcul pour l'analyse spectrale directe.

Les étapes nécessaires au calcul de (2.108) sont résumées à la figure 2.24. Il convient de noter que la moyenne est calculée au niveau des densités spectrales et non pas de leur quotient  $G_i(e^{j\omega_k})$  comme cela était le cas avec (2.91). Ceci constitue un grand avantage car les différents  $G_i(e^{j\omega_k})$  peuvent être très imprécis comme indiqué au § 2.4.2.5.)

b) Lissage fréquentiel des densités spectrales

Une fenêtre temporelle est utilisée pour diminuer artificiellement, dans le calcul de  $\phi_{uu}(\omega_k)$  et  $\phi_{uy}(\omega_k)$ , l'importance des termes, souvent imprécis,  $R_{uu}(h)$  et  $R_{uy}(h)$  correspondant à de grandes valeurs de  $h$ . L'emploi d'une fenêtre temporelle correspond à une opération de convolution dans le domaine fréquentiel (cf. équation 2.76).

Par exemple, la densité interspectrale lissée qui se calcule comme:

$$\phi_{uy,f}(\omega_k) = \sum_{h=0}^{N-1} R_{uy}(h) f(h) e^{-j2\pi kh/N} \quad (2.109)$$

peut s'exprimer comme le produit de convolution fréquentiel suivant:

$$\phi_{uy,f}(\omega_k) = \frac{1}{2\pi} \phi_{uy}(\omega_k) * F(\omega_k) \quad (2.110)$$

où  $F(\omega_k)$  représente la transformée de Fourier discrète de la fenêtre temporelle  $f(h)$ . On peut donc interpréter la méthode indirecte comme un lissage fréquentiel entre valeurs spectrales voisines. Il est utile de remarquer que la fenêtre temporelle du § 2.4.2.2 (cf. également fig. 2.24) avait été introduite pour réduire les erreurs de troncature dans le domaine temporel alors qu'ici elle sert à réduire la variabilité des densités spectrales dans le domaine fréquentiel.

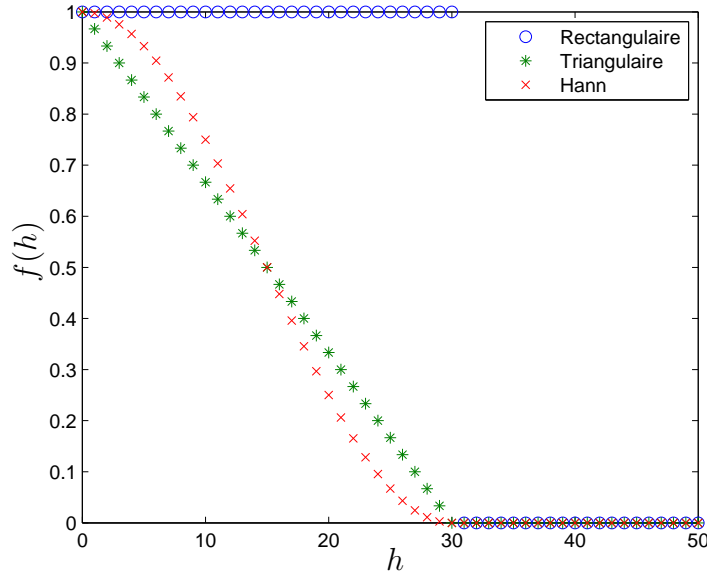
Quelques fenêtres temporelles de largeur  $M$  fréquemment utilisées sont données ci-dessous. Ce sont les mêmes fenêtres que celles définies dans le tableau 2.3 à la différence qu'elles sont données ici pour les instants d'échantillonnage  $h = 0, 1, \dots, M$  et non pas pour le temps continu  $t \in [-\theta, \theta]$ .

*Rectangulaire*

$$f(h) = \begin{cases} 1 & h = 0, 1, \dots, M \\ 0 & h > M \end{cases} \quad (2.111)$$

*Triangulaire (Bartlett)*

$$f(h) = \begin{cases} 1 - h/M & h = 0, 1, \dots, M \\ 0 & h > M \end{cases} \quad (2.112)$$

FIG. 2.25 – Fenêtres temporelles rectangulaire, triangulaire et de Hann pour  $M = 30$ .

*Hann*

$$f(h) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos(\pi h/M) & h = 0, 1, \dots, M \\ 0 & h > M \end{cases} \quad (2.113)$$

*Hamming*

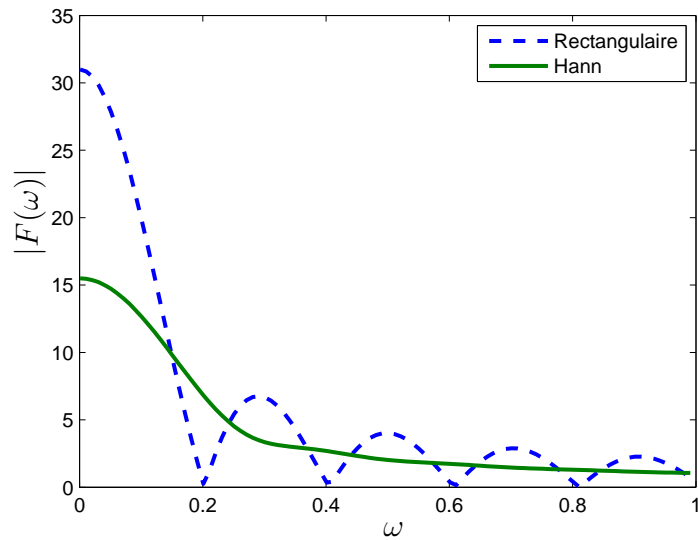
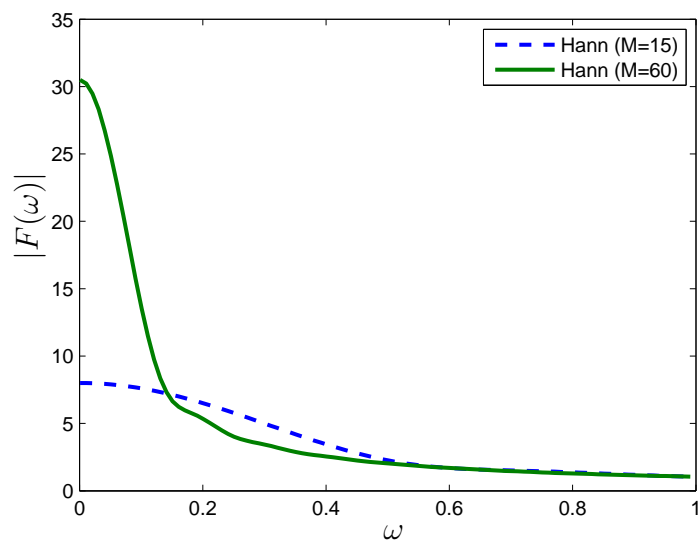
$$f(h) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos(\pi h/M) & h = 0, 1, \dots, M \\ 0 & h > M \end{cases} \quad (2.114)$$

Les fenêtres rectangulaires et de Hann sont illustrées dans les domaines temporel et fréquentiel aux figures 2.25 et 2.26. L'effet du choix de  $M$  est illustré à la figure 2.27 pour le cas de la fenêtre de Hann.

Si  $M$  est grand, l'effet de lissage de la fenêtre sera réduit. D'autre part si  $M$  est trop petit, des parties essentielles des fonctions de corrélation seront perdues par effet de lissage. On choisira donc  $M$  comme un compromis entre les deux objectifs suivants:

- bon lissage de façon à réduire la variabilité de  $G(e^{j\omega_k})(M$  petit par rapport à  $N)$ ,
- bonne résolution ( $M$  suffisamment grand de façon à ce que  $|R_{uu}(M)| \ll R_{uu}(0)$  et ainsi à ne pas perdre de l'information utile).

La valeur  $M = 20 - 30$  est souvent recommandée. Si un système possède des pics de résonance serrés, il convient de moins lisser ( $M$  plus grand). Notons enfin que pour  $M = N$ , il n'y a plus d'effet de lissage et l'on retrouve l'estimation donnée par (2.103). Si l'entrée est un bruit blanc à variance unité ( $R_{uu}(0) = 1$ ),  $R_{uy}(h)$  représente la réponse impulsionnelle du système (Eq. 2.56). Dans ce cas,  $M$  doit être plus grand que le temps d'établissement de la réponse impulsionnelle du système.

FIG. 2.26 – Transformées de Fourier des fenêtres rectangulaire et de Hann ( $M = 30$ ).FIG. 2.27 – Transformée de Fourier de la fenêtre de Hann pour deux valeurs de  $M$ .



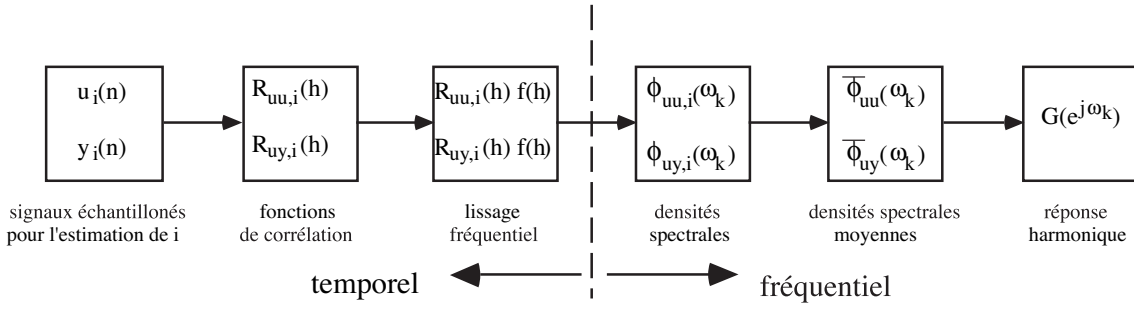


FIG. 2.28 – Etapes de calcul pour l'analyse spectrale basée sur un lissage fréquentiel et une moyenne sur plusieurs estimations.

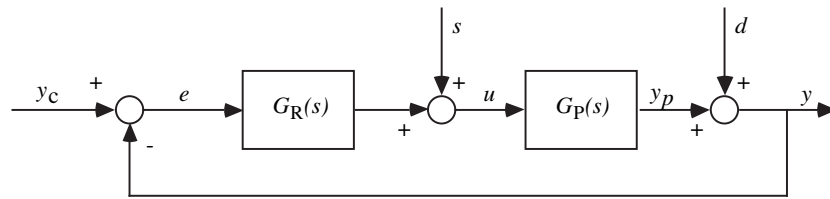


FIG. 2.29 – Système bouclé illustrant l'excitation externe  $y_c(t)$  ou  $s(t)$  et la perturbation  $d(t)$ .

- c) *Méthode combinée* Il est bien sûr possible de combiner un lissage fréquentiel des densités spectrales avec une moyenne sur plusieurs estimations. Il s'agit là d'une approche d'identification fréquentielle non paramétrique des plus performantes dont les étapes de calcul sont données à la figure 2.28.

## 2.5 IDENTIFICATION EN BOUCLE FERMÉE

Il est nécessaire d'effectuer une identification en boucle fermée si le système à identifier est instable en boucle ouverte ou s'il n'est pas possible d'ouvrir la boucle pour effectuer l'identification. La rétroaction peut également être inhérente à certains systèmes (par exemple de nature économique ou biologique).

Pour le système bouclé de la figure 2.29, le signal de commande  $u(t)$  est corrélé avec la perturbation  $d(t)$  par l'effet de la rétroaction si bien que  $R_{ud}(\tau) \neq 0$ . Il s'ensuit que  $G_P(j\omega)$  ne peut pas être identifié correctement à l'aide des densités spectrales  $\phi_{uu}(\omega)$  et  $\phi_{uy}(\omega)$  comme cela est le cas pour le système en boucle ouverte (cf. équation 2.92). Il faudra alors prévoir une excitation externe indépendante de  $d(t)$ , par exemple  $y_c(t)$  ou  $s(t)$ .

Considérons le cas avec l'excitation externe  $s(t) \neq 0$  et  $y_c(t) \equiv 0$ . Nous avons  $y = y_p + d$ , on peut donc écrire:

$$\hat{G}_P(j\omega) = \frac{\phi_{uy}(\omega)}{\phi_{uu}(\omega)} = \frac{\phi_{uy_p}(\omega) + \phi_{ud}(\omega)}{\phi_{uu}(\omega)} = G_P(j\omega) + \frac{\phi_{ud}(\omega)}{\phi_{uu}(\omega)} \quad (2.115)$$

L'équation (2.115) indique que pour le cas réaliste  $\phi_{ud}(\omega) \neq 0$  avec excitation

externe, l'estimation de  $G_P(j\omega)$  sur la base de  $\phi_{uu}(\omega)$  et  $\phi_{uy}(\omega)$  est erronée. Deux cas limites se présentent:

- i) S'il n'y a pas de perturbation ( $d = 0$ ), il en résulte  $\phi_{ud}(\omega) = 0$  et  $\hat{G}_P(j\omega) = G_P(j\omega)$ .
- ii) Si  $y_c = s = 0$  (sans excitation externe), on a:  $e = -y$  et

$$\phi_{uu}(\omega) = G_R(j\omega)\phi_{ue}(\omega)$$

(Démontrer cette relation). On obtient donc:

$$\hat{G}_P(j\omega) = \frac{\phi_{uy}(\omega)}{\phi_{uu}(\omega)} = \frac{-\phi_{ue}(\omega)}{\phi_{uu}(\omega)} = \frac{-\phi_{ue}(\omega)}{G_R(j\omega)\phi_{ue}(\omega)} = \frac{-1}{G_R(j\omega)} \quad (2.116)$$

Dans ce cas, on trouve une estimation totalement erronée de  $G_P$ .

On peut toutefois corriger cette situation défavorable en considérant la boucle fermée comme un système boucle ouverte avec l'entrée  $s$  et la sortie  $y$  et la perturbation  $d$  qui cette fois n'est pas corrélée avec l'entrée  $s$ . Donc, on peut estimer correctement la fonction de transfert entre  $s$  et  $y$  avec l'analyse spectrale:

$$\frac{\hat{G}_P(j\omega)}{1 + \hat{G}_R(j\omega)\hat{G}_P(j\omega)} = \frac{\phi_{sy}(\omega)}{\phi_{ss}(\omega)} \quad (2.117)$$

De même façon, on peut estimer la fonction de transfert entre  $s$  et  $u$ :

$$\frac{1}{1 + \hat{G}_R(j\omega)\hat{G}_P(j\omega)} = \frac{\phi_{su}(\omega)}{\phi_{ss}(\omega)} \quad (2.118)$$

En divisant les deux équations (2.117 et 2.118), on obtient:

$$\hat{G}_P(j\omega) = \frac{\phi_{sy}(\omega)}{\phi_{su}(\omega)} \quad (2.119)$$

On peut montrer que dans ce cas:

$$\text{var} \left\{ |\hat{G}_P(j\omega)| \right\} \equiv \frac{1}{2N} \left[ \frac{\phi_{dd}(\omega)}{\phi_{ss}(\omega)|F(j\omega)|^2} \right] \quad (2.120)$$

$$\text{var} \left\{ |\arg \hat{G}_P(j\omega)| \right\} \equiv \frac{1}{2N} \left[ \frac{\phi_{dd}(\omega)|G_P(j\omega)|^2}{\phi_{ss}(\omega)|F(j\omega)|^2} \right] \quad (2.121)$$

où

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + G_R(j\omega)G_P(j\omega)}$$

En d'autres termes, la variance de l'estimation

- augmente avec l'intensité du bruit  $d(t)$  et diminue avec celle de l'excitation  $s(t)$ ,
- diminue avec le nombre de mesures disponibles,

- augmente avec le gain  $G_R(j\omega)G_P(j\omega)$  de la boucle de commande.

En utilisant  $y_c(t)$  au lieu de  $s(t)$  comme excitation externe indépendante de  $d(t)$ , il est possible de contrôler les variations de la grandeur commandée  $y(t)$ . On obtient alors de manière tout à fait analogue:

$$\hat{G}_P(j\omega) = \frac{\phi_{y_c y}(\omega)}{\phi_{y_c u}(\omega)} \quad (2.122)$$

## 2.6 FONCTION DE TRANSFERT À PARTIR D'UN MODÈLE NON PARAMÉTRIQUE

Il est souvent souhaitable, à partir d'un modèle *non paramétrique* déterminé expérimentalement (réponse indicielle, impulsionnelle ou harmonique), de calculer un modèle *paramétrique* (fonction de transfert).

### 2.6.1 Fonction de transfert du premier ordre à partir de la réponse indicielle ou impulsionnelle

#### 2.6.1.1 Méthode graphique

Il est possible d'estimer graphiquement les coefficients d'une fonction de transfert à partir du comportement temporel entrée-sortie d'un système dynamique. Il ne faut pas chercher à identifier des systèmes d'ordre trop élevé avec cette méthode, la lecture des coefficients sur les graphiques devenant très malaisée à partir du second ordre.

Soit l'exemple d'un système du premier ordre possédant la fonction de transfert:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (2.123)$$

avec  $K$  le gain statique et  $\tau$  le constante de temps du système. La réponse indicielle de ce système:

$$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau}) \quad (2.124)$$

est représentée à la figure 2.30 et la réponse impulsionnelle correspondante:

$$y(t) = \frac{K}{\tau}(e^{-t/\tau}) \quad (2.125)$$

est représentée à la figure 2.31. On détermine graphiquement le gain statique  $K$  et la constante de temps  $\tau$  du système comme indiqué aux figures 2.30 et 2.31. Cependant, suivant la qualité des mesures, il peut s'avérer difficile de tracer précisément la tangente à pente maximale, donc de déterminer la constante de temps. De plus, une telle approche est mal adaptée aux systèmes d'ordre plus élevé car la forme des réponses indicielle et impulsionnelle dépend, dans une large mesure, du rapport des constantes de temps. Il est mal aisé de déterminer ce rapport sur un graphique.

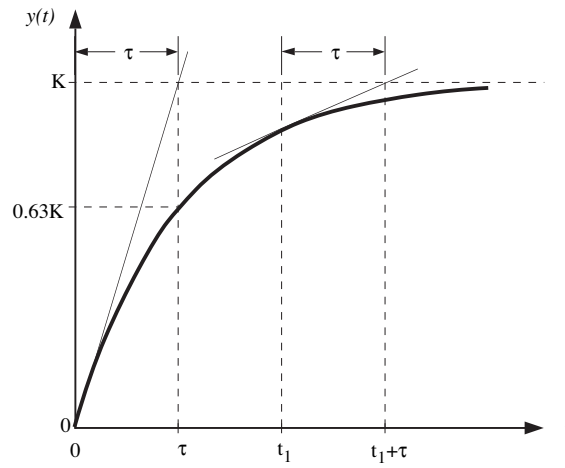


FIG. 2.30 – Réponse indicielle d'un système du premier ordre.

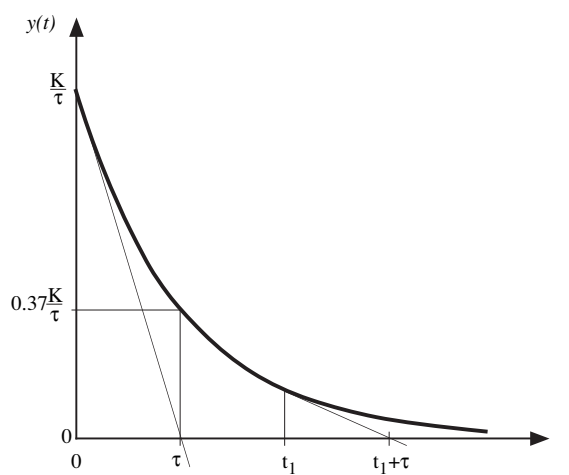


FIG. 2.31 – Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre.

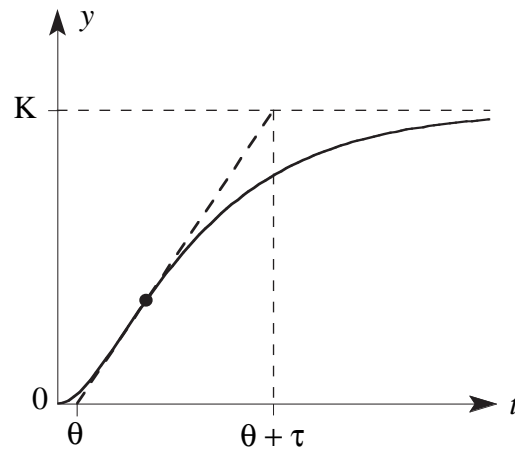


FIG. 2.32 – Approximation de la réponse d'un système d'ordre 2 ou supérieur.

### 2.6.1.2 Méthode de Ziegler-Nichols

Cette méthode permet d'approximer un système non oscillant d'ordre 2 ou supérieur par une fonction de transfert du premier ordre avec retard pur. On relève la réponse indicielle sur laquelle on lit trois valeurs:

- le gain statique  $K$ ,
- le retard pur  $\theta$ ,
- et la constante de temps  $\tau$

d'un système du premier ordre avec retard pur (fig. 2.32):

$$G(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1} \quad (2.126)$$

Bien que cette méthode ne représente qu'une approximation grossière, elle est souvent suffisante pour la synthèse d'un régulateur.

## 2.6.2 Fonction de transfert du deuxième ordre à partir de la réponse indicielle

Un système du deuxième ordre sans zéro se rencontre dans la littérature sous la forme suivante:

$$G(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.127)$$

où  $K$  est le gain statique,  $\zeta$  le coefficient d'amortissement et  $\omega_n$  la pulsation propre ou naturelle [1/s]. Les pôles de  $G(s)$  sont:

$$p_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.128)$$

Ces pôles peuvent être réels distincts, réels confondus ou conjugués complexes, donc trois cas peuvent être considérés:

**Cas sur-amorti:** ( $\zeta > 1$ ) La fonction de transfert  $G(s)$  peut dans ce cas être décomposée en deux facteurs du premier ordre:

$$G(s) = K \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (2.129)$$

La réponse indicielle de ce système sera non oscillatoire:

$$y(t) = K \left( 1 - \frac{\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}}{\tau_1 - \tau_2} \right) \quad t \geq 0 \quad (2.130)$$

**Cas critique:** ( $\zeta = 1$ ) La fonction de transfert  $G(s)$  se résume dans ce cas à:

$$G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \quad (2.131)$$

et la réponse indicielle est alors:

$$y(t) = K \left[ 1 - \left( 1 + \frac{1}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right] \quad t \geq 0 \quad (2.132)$$

**Cas sous-amorti:** ( $0 \leq \zeta < 1$ ) La réponse indicielle oscillatoire dans ce cas :

$$y(t) = K - \frac{K}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega t + \theta) \quad t \geq 0 \quad (2.133)$$

avec  $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  et  $\theta = \arccos \zeta$  est représentée à la figure 2.33. Un point particulier est le premier maximum qu'il est important de connaître et facile à mesurer. Ses coordonnées  $t_p$  et  $y(t_p)$  sont obtenues en exploitant la première dérivée de la réponse indicielle qui est également la réponse impulsionnelle de  $G(s)$ :

$$\dot{y}(t) = \frac{K \omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega t \quad t \geq 0 \quad (2.134)$$

Le premier maximum est obtenu pour  $\omega t_p = \pi$ . Ainsi

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{et} \quad y(t_p) = K + K e^{\frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \quad (2.135)$$

La marche à suivre pour identifier la fonction de transfert d'un système oscillant du deuxième ordre sans zéro est la suivante:

1. Mesurer la valeur finale de la réponse indicielle, ce qui permet de déterminer la valeur du gain statique  $K$ .
2. Mesurer l'amplitude du premier maximum, ce qui permet de déterminer la valeur de  $\zeta$ .
3. Mesurer l'instant d'apparition de ce premier maximum, ce qui permet de déterminer la valeur de la pulsation naturel  $\omega_n$ .

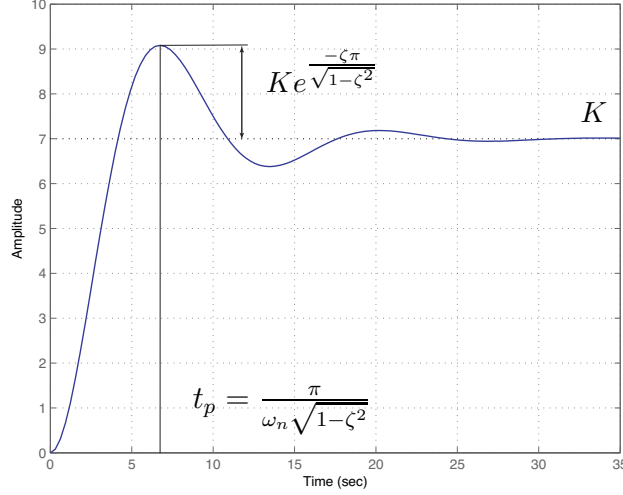


FIG. 2.33 – Réponse indicielle d'un système sous-amorti du deuxième ordre sans zéro.

### 2.6.3 Fonction de transfert d'ordre quelconque à partir de la réponse impulsionnelle

A partir de la réponse impulsionnelle obtenue expérimentalement, par exemple par déconvolution numérique (cf. § 2.2.2), il est possible d'identifier une fonction de transfert de la forme suivante (cf. section 3.1, avec ici  $m = n$ ):

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (2.136)$$

La définition de  $G(z)$  permet d'écrire:

$$G(z) = g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \dots \quad (2.137)$$

En combinant ces deux équations, on obtient:

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} &= g(0) + [g(1) + a_1 g(0)]z^{-1} + \dots \\ + \left[ g(n) + \sum_{j=1}^n a_j g(n-j) \right] z^{-n} &+ \dots + \left[ g(2n) + \sum_{j=1}^n a_j g(2n-j) \right] z^{-2n} + \dots \end{aligned} \quad (2.138)$$

On égale les coefficients des termes de même puissance de  $z^0$  à  $z^{-n}$  pour obtenir, sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(n) \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

L'équation (2.139) permettra de calculer les coefficients  $b_j$  à partir de  $g(j)$  une fois les coefficients  $a_j$  connus ( $j = 0, 1, \dots, n; a_0 = 1$ ).

Afin de déterminer les coefficients  $a_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), on égale les coefficients des termes de même puissance de  $z^{-(n+1)}$  à  $z^{-2n}$  dans l'équation (2.138) pour obtenir:

$$\begin{bmatrix} g(n) & g(n-1) & \cdots & g(1) \\ g(n+1) & g(n) & \cdots & g(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g(2n-1) & g(2n-2) & \cdots & g(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g(n+1) \\ -g(n+2) \\ \vdots \\ -g(2n) \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

ou

$$Ga = g \quad (2.141)$$

La matrice carrée  $G$  de dimension  $n$  est, en principe, de rang égal à l'ordre du système. Elle est ainsi régulière, ce qui permet d'écrire:

$$a = G^{-1}g \quad (2.142)$$

En présence d'erreurs associées aux valeurs mesurées ou estimées de la réponse impulsionnelle, il est possible d'ajouter des lignes supplémentaires au système d'équations (2.140). On obtiendra ainsi une solution au sens des moindres carrés:

$$a = G^+g \quad (2.143)$$

où  $G^+ = (G^T G)^{-1} G^T$  représente la matrice pseudo-inverse de  $G$  (cf. annexe B).

Les coefficients  $a_j$  et  $b_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n; a_0 = 1$ ) définissent la fonction de transfert (2.136).

## 2.6.4 Fonction de transfert à partir de la réponse harmonique

La réponse harmonique représentée dans le diagramme de Bode ou de Nyquist est souvent utilisée pour dimensionner un régulateur et analyser la stabilité du système bouclé. On peut également utiliser la réponse harmonique déterminée expérimentalement pour obtenir un modèle *paramétrique* de la forme:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + 1} \quad m \leq n \quad (2.144)$$

Deux approches permettent de déterminer les paramètres de ce modèle.

### 2.6.4.1 Approche graphique

L'approche graphique est indiquée à la figure 2.34. On recherche en général des modèles d'ordre réduit (premier ou second ordre), par exemple:

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (2.145)$$



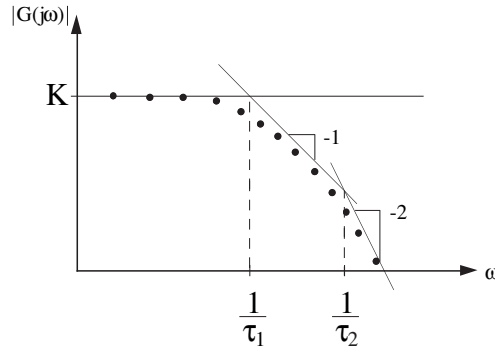


FIG. 2.34 – Approche graphique pour déterminer les paramètres d'un système du second ordre.

S'il est nécessaire d'inclure un retard pur, lequel se manifestera sur l'argument de  $G(j\omega)$ , on choisira alors:

$$G(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)} \quad (2.146)$$

#### 2.6.4.2 Approche numérique

L'approche numérique consiste à faire varier les coefficients réels  $(a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m)$  de façon à ce que les nombres complexes calculés par le modèle  $\hat{G}(j\omega_k)$  soient aussi proches que possible des valeurs mesurées  $G(j\omega_k)$ . Celles-ci sont données par  $R_e\{G(j\omega)\}$  et  $I_m\{G(j\omega)\}$ .

On peut, par exemple, chercher à minimiser le critère quadratique suivant pour  $N$  mesures expérimentales:

$$\min_{\theta} \sum_{k=1}^N |\varepsilon_s(j\omega_k)|^2 = \min_{\theta} \sum_{k=1}^N \left| G(j\omega_k) - \frac{b_m(j\omega_k)^m + \dots + b_1(j\omega_k) + b_0}{a_n(j\omega_k)^n + \dots + a_1(j\omega_k) + 1} \right|^2 \quad (2.147)$$

où  $\theta = [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m]^T$  est le vecteur de paramètres. Comme l'erreur entre la valeur expérimentale  $G(j\omega_k)$  et la valeur correspondante du modèle est *non linéaire* par rapport aux paramètres à estimer, il n'existe en général pas de solution analytique et donc de garantie d'un minimum global.

On peut contourner ce problème avec la **méthode de Levy** qui propose de minimiser le critère quadratique suivant:

$$J_\ell(\theta) = \min_{\theta} \sum_{k=1}^N \left| [a_n(j\omega_k)^n + \dots + a_1(j\omega_k) + 1] G(j\omega_k) - [b_m(j\omega_k)^m + \dots + b_1(j\omega_k) + b_0] \right|^2 \quad (2.148)$$

L'erreur à chaque fréquence

$$\varepsilon(j\omega_k) = [a_n(j\omega_k)^n + \dots + a_1(j\omega_k) + 1]G(j\omega_k) - [b_m(j\omega_k)^m + \dots + b_1(j\omega_k) + b_0] \quad (2.149)$$

devient ainsi *linéaire* par rapport aux paramètres  $a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ .

Il y a cependant une difficulté pratique à résoudre ce problème de moindres carrés linéaires car l'erreur à chaque fréquence est complexe alors que les coefficients à estimer sont réels. On peut contourner ce problème et définir une erreur réelle en considérant séparément les parties réelles et imaginaires de l'erreur. On obtient ainsi:

$$\begin{aligned} J_\ell(\theta) = \min_{\theta} \sum_{k=1}^N & [a_n R_e\{(j\omega_k)^n G(j\omega_k)\} + \dots + a_1 R_e\{(j\omega_k)G(j\omega_k)\} + R_e\{G(j\omega_k)\} \\ & - b_m R_e\{(j\omega_k)^m\} - \dots - b_1 R_e\{j\omega_k\} - b_0]^2 \\ & + [a_n I_m\{(j\omega_k)^n G(j\omega_k)\} + \dots + a_1 I_m\{(j\omega_k)G(j\omega_k)\} + I_m\{G(j\omega_k)\} \\ & - b_m I_m\{(j\omega_k)^m\} - \dots - b_1 I_m\{j\omega_k\}]^2 \quad (2.150) \end{aligned}$$

En définissant:

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} R_e\{G(j\omega_1)\} \\ R_e\{G(j\omega_2)\} \\ \vdots \\ R_e\{G(j\omega_N)\} \\ I_m\{G(j\omega_1)\} \\ I_m\{G(j\omega_2)\} \\ \vdots \\ I_m\{G(j\omega_N)\} \end{bmatrix} \quad (2.151)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -R_e\{(j\omega_1)G(j\omega_1)\} & \dots & -R_e\{(j\omega_1)^n G(j\omega_1)\} & 1 & R_e\{j\omega_1\} & \dots & R_e\{j\omega_1\}^m \\ -R_e\{(j\omega_2)G(j\omega_2)\} & \dots & -R_e\{(j\omega_2)^n G(j\omega_2)\} & 1 & R_e\{j\omega_2\} & \dots & R_e\{j\omega_2\}^m \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -R_e\{(j\omega_N)G(j\omega_N)\} & \dots & -R_e\{(j\omega_N)^n G(j\omega_N)\} & 1 & R_e\{j\omega_N\} & \dots & R_e\{j\omega_N\}^m \\ -I_m\{(j\omega_1)G(j\omega_1)\} & \dots & -I_m\{(j\omega_1)^n G(j\omega_1)\} & 0 & I_m\{j\omega_1\} & \dots & I_m\{j\omega_1\}^m \\ -I_m\{(j\omega_2)G(j\omega_2)\} & \dots & -I_m\{(j\omega_2)^n G(j\omega_2)\} & 0 & I_m\{j\omega_2\} & \dots & I_m\{j\omega_2\}^m \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -I_m\{(j\omega_N)G(j\omega_N)\} & \dots & -I_m\{(j\omega_N)^n G(j\omega_N)\} & 0 & I_m\{j\omega_N\} & \dots & I_m\{j\omega_N\}^m \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{E} = \mathcal{G} - \Phi\theta$$

le critère (2.148) devient:

$$J_\ell(\theta) = \min_{\theta} \mathcal{E}^T \mathcal{E}$$

dont la solution est bien connue (cf. section 3.4):

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathcal{G} \quad (2.152)$$

**Remarque:** Il faut noter que  $\varepsilon(j\omega_k) = [a_n(j\omega_k)^n + \dots + a_1(j\omega_k) + 1]\varepsilon_s(j\omega_k)$  qui montre que l'erreur linéaire  $\varepsilon(j\omega_k)$  est beaucoup plus importante en hautes fréquences qu'en basses fréquences. Ceci conduit en général à une mauvaise identification de la fonction de transfert aux basses fréquences. Il est possible de modifier la méthode de Levy avec une pondération adéquate (avec  $\frac{1}{\hat{a}_n(j\omega_k)^n + \dots + \hat{a}_1(j\omega_k) + 1}$ ) de l'erreur  $\varepsilon(j\omega_k)$  où  $\hat{a}_n, \dots, \hat{a}_1$  sont des paramètres estimés avec la méthode de Levy standard.

## 2.7 COMPARAISON DES MÉTHODES NON PARAMÉTRIQUES

L'observation expérimentale de la *réponse indicielle* est simple à mettre en œuvre et donne une indication rapide sur les constantes de temps, le gain statique et le retard pur du système. Cependant, les courbes obtenues ne fournissent qu'une représentation grossière du système et sont relativement sensibles aux bruits de toutes sortes qui ne manquent pas de perturber le système. La *réponse impulsionnelle* peut être obtenue en dérivant (numériquement) la réponse indicielle mesurée.

Le tableau 2.4 résume les approches non paramétriques temporelle et fréquentielle permettant d'estimer la réponse impulsionnelle ou, de façon équivalente, la fonction de transfert d'un système lscr discret.

Les approches qui utilisent directement les signaux d'entrée et de sortie sont faciles à mettre en œuvre, mais elles sont fort sensibles à la perturbation d, laquelle représente aussi bien les effets aléatoires (bruits de mesure) que déterministes (dérives, perturbations de toutes sortes).

Les approches basées sur les fonctions de corrélation sont insensibles à tout bruit additif sur la sortie pour autant que celui-ci soit non corrélé avec le signal d'entrée. Il s'ensuit que ces méthodes sont souvent utilisées dans le but de réduire l'influence du bruit. Les couples résultants d'autocorrélation et d'intercorrélation, qui sont de longueur beaucoup plus courte que les signaux temporels originaux, sont ensuite utilisés pour réaliser la déconvolution dans le domaine temporel (*méthode de corrélation*) ou fréquentiel (*analyse spectrale*). La méthode de l'analyse spectrale permet également un lissage fréquentiel ainsi que l'évaluation d'une moyenne des densités spectrales avant le calcul (délicat) de la fonction de transfert.

TAB. 2.4 – Différentes approches pour l'identification de modèles non paramétriques pour systèmes lscr.

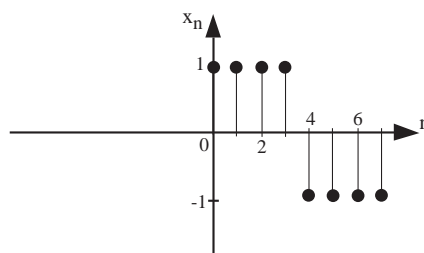
		Signaux entrée-sortie	Fonction de corrélation
Temporelle	conv	<b>Analyse temporelle</b> $y(k) = \sum_{j=0}^k g(j) u(k-j) + d(k)$	<b>Méthode de corrélation</b> $R_{uy}(h) = \sum_{j=0}^{\infty} g(j) R_{uu}(h-j)$
	déconv	$g(k) = \frac{1}{u(0)} \left[ y(k) - d(k) - \sum_{j=0}^{k-1} g(j) u(k-j) \right]$	$\begin{bmatrix} g(0) \\ \square \\ \vdots \\ g(K-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{uu}(0) & \square & R_{uu}(K-1) \\ \square & & \square \\ \vdots & & \vdots \\ R_{uu}(N-1) & \square & R_{uu}(N-K) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{uy}(0) \\ \square \\ \vdots \\ R_{uy}(N-1) \end{bmatrix}$
Fréquentielle	conv	<b>Analyse fréquentielle</b> $Y(k) = G(e^{j\omega_k}) U(k) + D(k)$	<b>Analyse spectrale</b> $\phi_{uy}(\omega_k) = G(e^{j\omega_k}) \phi_{uu}(\omega_k)$
	déconv	$G(e^{j\omega_k}) = \frac{Y(k) - D(k)}{U(k)}$	$G(e^{j\omega_k}) = \frac{\bar{\phi}_{uy}(\omega_k)}{\bar{\phi}_{uu}(\omega_k)}$

## 2.8 EXERCICES RÉSOLUS

### Exercice 1

Enoncé :

- a) Déterminer la transformée de Fourier discrète  $X(k)$  du signal numérique suivant défini pour 8 points d'échantillonnage ( $T = 1; n = 0, 1, \dots, 7$ ):



- b) Evaluer la transformée de Fourier discrète et la série de Fourier de la séquence précédente répétée périodiquement.
- c) Le signal temporel initial est maintenant considéré pour 16 points d'échantillonnage ( $T = 0.5, n = 0, 1, \dots, 15$ ). Déterminer sa transformée de Fourier discrète et discuter les résultats.

Solution :

- a) **Transformée de Fourier discrète  $X(k)$  de  $x_n$**

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi nk/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Ici  $N = 8$ , ainsi  $k = 0, 1, \dots, 7$  :

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^7 x_n e^{-j2\pi nk/8} = \sum_{n=0}^3 1 e^{-j2\pi nk/8} + \sum_{n=4}^7 (-1) e^{-j2\pi nk/8} \\ &= 1 + e^{-j\pi k/4} + e^{-j\pi k/2} + e^{-j3\pi k/4} \\ &\quad - e^{-j\pi k} - e^{-j5\pi k/4} - e^{-j3\pi k/2} - e^{-j7\pi k/4} \quad k = 0, 1, \dots, 7 \end{aligned}$$

On peut aussi exprimer  $X(k)$  comme la somme de la suite précédente:

$$X(k) = \frac{(1 - e^{-j\pi k})^2}{1 - e^{-j(\pi/4)k}} = \frac{(1 - e^{-j4\omega_k})^2}{1 - e^{-j\omega_k}} \quad k = 0, 1, \dots, 7$$

car, avec  $T = 1$ , la pulsation discrète s'écrit:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{1 \cdot 8} = k \frac{\pi}{4} \quad k = 0, 1, \dots, 7$$

### b) Signal périodique

- La transformée de Fourier discrète suppose déjà un signal qui se répète périodiquement. Ainsi, le contenu spectral trouvé sous a) ne changera pas si plusieurs périodes sont considérées. Seule l'amplitude variera: si  $p$  périodes sont considérées, l'amplitude sera amplifiée par  $p$ .
- Dans le cas de la série de Fourier d'un signal numérique, comme l'amplitude  $c_k$  est pondérée par le terme  $1/N$ , la série de Fourier sera strictement la même.

### c) Signal du point a) échantillonné plus rapidement ( $T = 0.5$ )

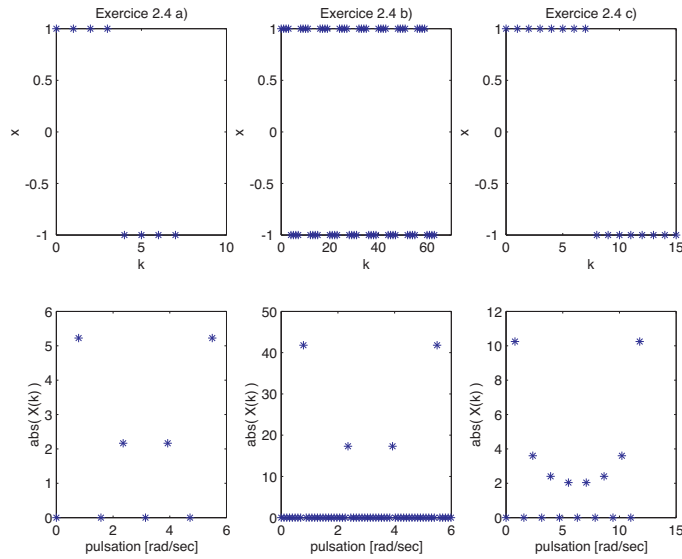
$$X(k) = \sum_{n=0}^{15} x_n e^{-j2\pi nk/16} = \sum_{n=0}^7 1 e^{-j2\pi nk/16} + \sum_{n=8}^{15} (-1) e^{-j2\pi nk/16}$$

avec la pulsation:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{0.5 \cdot 16} = k \frac{\pi}{4} \quad k = 0, 1, \dots, 15$$

Le fait d'échantillonner plus rapidement a augmenté l'information du signal et, de ce fait, a modifié son contenu spectral. La plage fréquentielle a doublé par rapport au point a).

Le signal  $x_n$  et le module de  $X(k)$  sont donnés à la figure suivante pour les trois cas, avec  $p = 8$  pour le cas b).



## Exercice 2

**Enoncé :** Les échantillons suivants de la réponse impulsionnelle d'un système du deuxième ordre ont été observés ( $T = 0.05$ ).

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(k)$	0	0.68	1.07	1.27	1.34	1.34	1.28	1.21	1.11

- Evaluer  $G(z)$  et  $G(s)$  ainsi que les pôles et les zéros correspondants pour ce système.

**Solution :**

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Réponse impulsionnelle:  $u(k) = \delta(k)$ ;  $y(k) = g(k)$

$$\Rightarrow g(k) + a_1 g(k-1) + a_2 g(k-2) = b_0 \delta(k) + b_1 \delta(k-1) + b_2 \delta(k-2)$$

$$\begin{aligned} k = 0 \quad g(0) &= b_0 && \rightarrow b_0 = 0 \\ 1 \quad g(1) + a_1 g(0) &= b_0 \delta(1) + b_1 && \rightarrow b_1 = 0.68 \\ 2 \quad g(2) + a_1 g(1) + a_2 g(0) &= b_0 \delta(2) + b_1 \delta(1) + b_2 && \rightarrow b_2 = 1.07 + 0.68 a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3 & g(3) + a_1 g(2) + a_2 g(1) = 0 \\ \dots & \\ 8 & g(8) + a_1 g(7) + a_2 g(6) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -g(3) \\ \dots \\ -g(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g(2) & g(1) \\ \dots & \dots \\ -g(7) & g(6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.575 \\ 0.614 \end{bmatrix} \quad b_2 = -0.0015$$

$$G(z) = \frac{0.68z^{-1} - 0.0015z^{-2}}{1 - 1.576z^{-1} + 0.614z^{-2}}$$

$G(s)$  à partir de  $G(z)$ , en utilisant MATLAB d2cm:

- zoh:  $G(s) = \frac{7.98s + 344.5}{s^2 + 9.77s + 19.3} = \frac{0.41s + 17.8}{0.052s^2 + 0.51s + 1}$

$$z_1 = -43.2 \quad p_1 = -2.74 \quad p_2 = -7.03$$

- tustin:  $G(s) = \frac{-0.21s^2 + 0.036s + 340.4}{s^2 + 9.69s + 19.03} = \frac{-0.0011s^2 + 0.0019s + 17.9}{0.052s^2 + 0.51s + 1}$

$$z_1 = -39.8 \quad z_2 = 40.0 \quad p_1 = -2.73 \quad p_2 = -6.79$$

### Exercice 3

**Enoncé :** Un signal binaire pseudo-aléatoire de période 7 échantillons:

$$u(k) = 1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, \dots$$

est utilisé pour exciter le système:

$$G(z) = \frac{0.7z^{-1}}{1 - 0.3z^{-1}} \quad (2.153)$$

- a) Calculer la sortie  $y(k)$  ainsi que les fonctions d'autocorrélation  $R_{uu}(h)$  et d'intercorrélation  $R_{uy}(h)$ .
- b) Utiliser  $R_{uu}(h)$  comme entrée du système et comparer la sortie correspondante à  $R_{uy}(h)$ .
- c) Calculer la réponse impulsionnelle du système et la comparer à  $R_{uy}(h)$ .

**Solution :**

a) Calcul de  $\mathbf{y(k)}$ ,  $\mathbf{R_{uu}(h)}$ ,  $\mathbf{R_{uy}(h)}$

1. Calcul de la réponse impulsionnelle  $g(k)$  à partir de:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k}$$

De (2.153) par division polynomiale:

$$G(z) = 0.7z^{-1} + 0.21z^{-2} + 0.063z^{-3} + 0.0189z^{-4} + 0.0057z^{-5} + \dots$$

La transformation en  $z$  inverse de  $G(z)$  donne (entrée 19 du tableau C.2 en annexe C):

$$g(k) = 0.7 \cdot 0.3^{k-1} \quad k \geq 1$$

TAB. 2.5 – Tableau des résultats (pour  $N = 1024$ ).

$k, h$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$u(k)$	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	...
$y(k)$	0	0.7	-0.49	0.553	0.866	0.960	-0.412	-0.824	...
$R_{uu}(h)$	1	-0.142	-0.143	-0.144	-0.141	-0.142	-0.143	0.993	...
$R_{uy}(h)$	-0.142	0.657	0.097	-0.070	-0.121	-0.134	-0.140	-0.141	...
$g(h)$	0	0.700	0.210	0.063	0.019	0.006	0.002	0.005	...

$$2. y(k) = \sum_{j=0}^k g(k-j)u(j) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

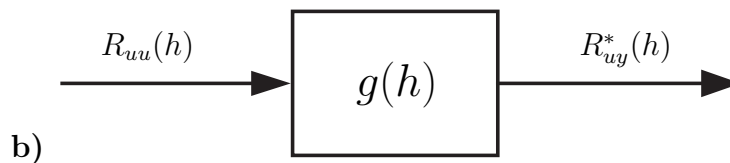
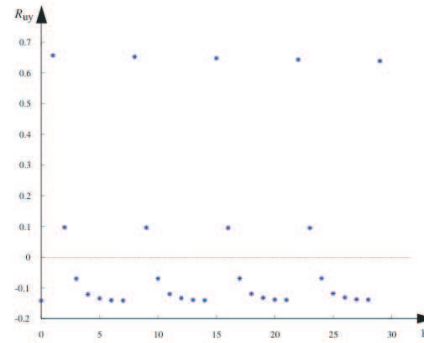
Avec Matlab: conv(u, g)

$$3. R_{uu}(h) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n)u(n+h) \quad h = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Avec Matlab: xcorr(u)

$$4. R_{uy}(h) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n)y(n+h) \quad h = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

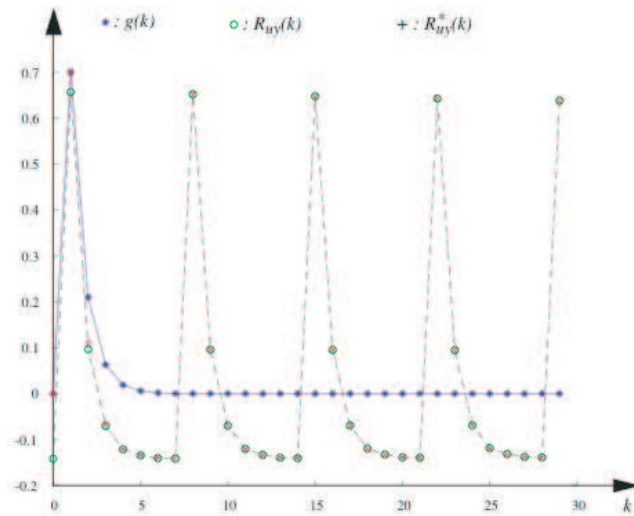
Avec Matlab: xcorr(u, y)



$R_{uy}^*(h) \approx R_{uy}(h)$ , la différence étant due au nombre fini de points, ( $N = 1024$ ) utilisés pour calculer  $R_{uu}(h)$  et  $R_{uy}(h)$ .

c)  $g(h) \neq R_{uy}(h)$  car l'entrée aléatoire utilisée n'est pas vraiment blanche.





### Exercice 4

**Enoncé :** Soit le signal analogique suivant:

$$x(t) = \frac{\sin(2t)}{2t} = \text{sinc}(2t)$$

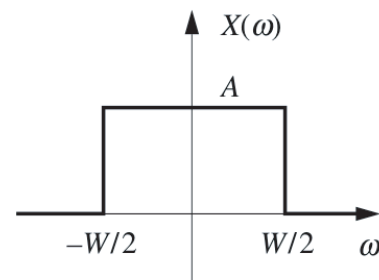
- Calculer et représenter graphiquement le spectre de fréquences de ce signal.
- Répéter le point a) si le signal est échantillonné avec la période d'échantillonnage  $\pi/2$ .

**Solution :**

#### a) Spectre fréquentiel

L'exemple 4 de l'annexe A donne (voir également la propriété 13 du tableau A.1):

$$x(t) = \frac{AW}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{2}\right)$$

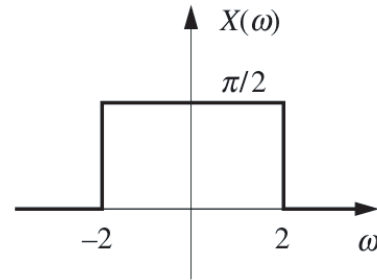


Ici:

$$\frac{Wt}{2} = 2t \rightarrow W = 4$$

$$\frac{AW}{2\pi} = 1 \rightarrow A = \frac{2\pi}{W} = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \mathcal{F}\{\text{sinc}(2t)\} = \frac{\pi}{2}P_4(\omega)$$



b) Signal échantillonné avec la période  $\pi/2$

$$\left. \begin{array}{l} x_n = \text{sinc}(2nT) \\ T = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} x_n = \text{sinc}(n\pi)$$

$$\text{sinc}(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour } n \neq 0 \end{cases} \quad \text{voir figure 2.19}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\Omega n} = 1 \quad \Omega = \omega T = \frac{\omega\pi}{2}$$

### Exercice 5

**Enoncé :** Soient les signaux  $u(n)$  et  $y(n)$  donnés comme suit pour 3 points d'échantillonnage:

n	0	1	2
u(n)	2	1	1
y(n)	1	2	2

- Calculer la densité interspectrale  $\phi_{uy}(\omega k)$  à partir de l'intercorrélation  $R_{uy}(h)$ .
- Calculer la densité interspectrale  $\phi_{uy}(\omega k)$  à partir des transformées de Fourier discrètes de  $u(n)$  et  $y(n)$ .
- Les résultats sous points a) et b) sont-ils identiques?

**Solution :**

- On suppose que les signaux  $u$  et  $y$  se continuent périodiquement. Pour  $N = 3$ , on peut écrire:

$$R_{uy}(h) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^2 u(n)y(n+h) \quad h = 0, 1, 2$$

$$R_{uy}(0) = \frac{1}{3}[u(0)y(0) + u(1)y(1) + u(2)y(2)] = \frac{1}{3}(2 + 2 + 2) = 2$$

$$R_{uy}(1) = \frac{1}{3}[u(0)y(1) + u(1)y(2) + u(2)y(3)] = \frac{1}{3}(4 + 2 + 1) = \frac{7}{3}$$

$$R_{uy}(2) = \frac{1}{3}[u(0)y(2) + u(1)y(3) + u(2)y(4)] = \frac{1}{3}(4 + 1 + 2) = \frac{7}{3}$$

$$\Phi_{uy}(\omega_k) = \sum_{h=0}^{N-1} R_{uy}(h) e^{-j2\pi kh/N} \quad \text{avec} \quad \omega_k = \omega_s \frac{k}{N} \quad k = 0, 1, 2$$

$$\Phi_{uy}(\omega_0) = 2 + \frac{7}{3} + \frac{7}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\Phi_{uy}(\omega_1) = 2 + \frac{7}{3} e^{-j2\pi/3} + \frac{7}{3} e^{-j4\pi/3}$$

$$\Phi_{uy}(\omega_2) = 2 + \frac{7}{3} e^{-j4\pi/3} + \frac{7}{3} e^{-j8\pi/3} = 2 + \frac{7}{3} e^{-j4\pi/3} + \frac{7}{3} e^{-j2\pi/3}$$

$$\text{b) } \Phi_{uy}(\omega_k) = \frac{1}{N} U(-k) Y(k) \quad \left. \begin{array}{l} U(k) \\ Y(k) \end{array} \right\} TFD$$

$$U(-k) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^2 u(n) e^{j2\pi kn/3} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$U(0) = \sum_{n=0}^2 u(n) = 4$$

$$Y(0) = 1 + 2 + 2 = 5$$

$$U(-1) = \sum_{n=0}^2 u(n) e^{j2\pi n/3} = 2 + e^{j2\pi/3} + e^{j4\pi/3} \quad Y(1) = 1 + 2e^{-j2\pi/3} + 2e^{j4\pi/3}$$

$$U(-2) = \sum_{n=0}^2 u(n) e^{j4\pi n/3} = 2 + e^{j4\pi/3} + e^{j2\pi/3} \quad Y(2) = 1 + 2e^{-j4\pi/3} + 2e^{j2\pi/3}$$

On obtient ainsi:

$$\Phi_{uy}(\omega_0) = \frac{1}{3}(4)(5) = \frac{20}{3}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{uy}(\omega_1) &= \frac{1}{3}(2 + e^{j2\pi/3} + e^{j4\pi/3})(1 + 2e^{-j2\pi/3} + 2e^{-j4\pi/3}) \\ &= \frac{1}{3}[6 + 7e^{-j2\pi/3} + 7e^{-j4\pi/3}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{uy}(\omega_2) &= \frac{1}{3}(2 + e^{j4\pi/3} + e^{j2\pi/3})(1 + 2e^{-j4\pi/3} + 2e^{-j2\pi/3}) \\ &= \frac{1}{3}[6 + 7e^{-j2\pi/3} + 7e^{-j4\pi/3}] \end{aligned}$$

- c) Les résultats sont identiques car tous les signaux ont été répétés périodiquement, de façon explicite pour  $y_n$  sous point a), de façon implicite pour  $u(n)$  et  $y(n)$  sous point b). Si on n'avait pas considéré le signal  $y(n)$  comme périodique pour évaluer  $R_{uy}(1)$ ,  $R_{uy}(2)$  et  $\phi_{uy}(\omega_k)$ ,  $k = 0, 1, 2$ , alors les résultats auraient été différents.



## Chapitre 3

# MODÈLES DE REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUES

### 3.1 INTRODUCTION

Ce chapitre considère la représentation **paramétrique** de systèmes dynamiques sur la base de mesures entrées-sorties. Par rapport aux approches non paramétriques présentées au chapitre précédent, les méthodes paramétriques présentent un avantage considérable quant au nombre de paramètres à identifier. Mais voyons cela de plus près.

- Avec une approche *non paramétrique*, il n'est pas nécessaire de spécifier a priori la structure du modèle. Il s'ensuit que le nombre de grandeurs (paramètres) à estimer est élevé. Considérons le cas de  $N$  mesures. Une représentation temporelle est donnée tout simplement par la valeur de la sortie à ces  $N$  instants. La situation est tout à fait semblable pour une représentation fréquentielle: comme le diagramme de Bode est symétrique par rapport à la pulsation de Nyquist  $\omega_N = \omega_s/2$ , il suffit de déterminer  $N/2$  valeurs complexes (modules et arguments), donc en fait  $N$  grandeurs. Il s'ensuit qu'avec une approche non paramétrique,  $N$  mesures servent à déterminer  $N$  grandeurs (ou paramètres). Il n'y a donc pas de redondance dans les données propre à filtrer les erreurs de mesure.
- Dans le cas d'une approche paramétrique, la structure du modèle doit être spécifiée a priori, par exemple sous la forme de la fonction de transfert du premier ordre avec retard pur  $G(s) = Ke^{-\theta s}/(\tau s + 1)$  avec les 3 paramètres  $K$ ,  $\tau$  et  $\theta$ . Si l'on dispose d'un nombre de mesures supérieur au nombre de paramètres, il y aura redondance dans les données (plus d'équations que d'inconnues) servant à l'identification du modèle. Ceci constitue la caractéristique principale des modèles paramétriques.

Un premier élément de modélisation paramétrique a déjà été présenté à la section 2.6 où l'objectif était de calculer une fonction de transfert à partir d'une représentation non paramétrique. Dans ce chapitre, l'identification des paramètres du modèle

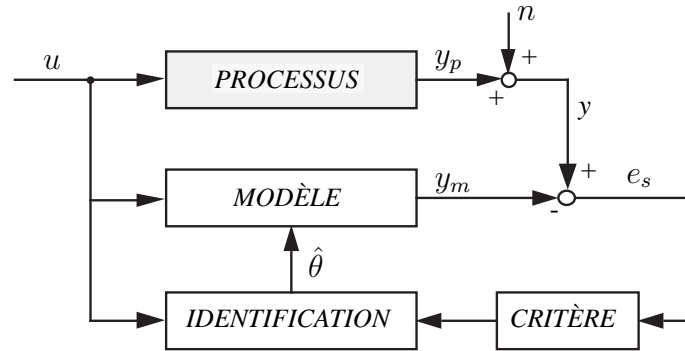


FIG. 3.1 – Schéma pour l'identification des paramètres du modèle:  $u$ , entrée (ajustable);  $y_p$ , sortie du processus (non mesurable);  $n$ , bruit (inconnu);  $y$ , sortie bruitée (mesurée);  $y_m$ , sortie du modèle (calculable);  $e_s$ , erreur de sortie (calculable);  $\hat{\theta}$ , vecteur des paramètres estimés.

se fera sur la base d'un critère d'écart entre des mesures expérimentales provenant du processus et une «simulation» des équations constituant le modèle (fig. 3.1). Pour cela, il faudra choisir au préalable:

- la structure du modèle (ou caractérisation du processus),
- le critère de performance,
- l'algorithme d'identification (c'est-à-dire la méthode de calcul des paramètres),
- le signal d'excitation  $u$ .

La validation du modèle ainsi obtenu représentera une étape importante de l'identification.

Par rapport à l'identification d'un modèle paramétrique à partir d'une représentation non paramétrique présentée à la section 2.6, les méthodes présentées dans ce chapitre comportent de nombreux avantages:

- possibilité d'utiliser des signaux d'excitation d'amplitude réduite,
- meilleure précision,
- suivi des paramètres du modèle en temps réel permettant, si nécessaire, un ajustement du régulateur pendant le fonctionnement du processus,
- identification des perturbations et des bruits de mesure ce qui permet de mieux identifier le processus lui-même,
- procédure d'identification plus courte,
- possibilité de valider le modèle obtenu.

Ce chapitre traitera uniquement de l'identification de systèmes dynamiques qui peuvent être représentés par des modèles monovariables discrets lscr (linéaires, stationnaires, causals et initialement au repos) de la forme:

$$y_m(k) + \sum_{i=1}^n a_i y_m(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j u(k-d-j) \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

où  $d$  représente le retard exprimé comme un multiple entier de la période d'échantillonnage  $T$ , et  $k$  l'instant d'échantillonnage  $kT$ . On suppose les valeurs de  $n$ ,  $m$

et  $d$  connues a priori.

La transformée en  $z$  de l'équation aux différences (3.1) donne:

$$Y_m(z)[1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}] = U(z)z^{-d}[b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}] \quad (3.2)$$

d'où

$$G(z) = \frac{Y_m(z)}{U(z)} = z^{-d} \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}} = z^{-d} \frac{B(z)}{A(z)} \quad (3.3)$$

### Opérateur retard

Dans le but de simplifier l'écriture des équations aux différences, on introduit l'opérateur retard  $q^{-1}$  défini comme suit:

$$q^{-1}y(k) \equiv y(k-1) \quad k \geq 1 \quad (3.4)$$

$$q^{-1}y(0) \equiv 0 \quad (3.5)$$

d'où l'on tire:

$$q^{-i}y(k) = y(k-i) \quad k \geq i \quad (3.6)$$

$$q^{-i}y(k) = 0 \quad 0 \leq k < i \quad (3.7)$$

L'équation (3.1) s'écrit ainsi:

$$A(q^{-1})y_m(k) = B(q^{-1})u(k-d) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) \quad (3.8)$$

avec

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n} \quad (3.9)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m} \quad (3.10)$$

On peut ainsi définir l'**opérateur de transfert temporel**  $G(q^{-1})$  qui, au signal discret  $u(k)$ , fait correspondre le signal discret  $y_m(k)$ :

$$G(q^{-1}) = \frac{y_m(k)}{u(k)} = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (3.11)$$

Comme l'opérateur de transfert temporel (3.11) possède la même forme que  $G(z)$  dans l'équation (3.3), on l'appellera également, par abus de langage, fonction de transfert.

Rappelons que la représentation par fonction de transfert présuppose un système lscr. La condition d'un système initialement au repos a été introduite en écrivant l'équation (3.2) permettant d'obtenir la fonction de transfert  $G(z)$  ou, de façon équivalente, par l'équation (3.7) pour l'opérateur de transfert temporel  $G(q^{-1})$ .

*Quel est l'ordre du modèle  $G(z)$  de l'équation (3.3)?*

*Est-il nécessaire d'imposer  $m \leq n$  dans l'équation (3.3) afin de garantir la causalité du système? Considérer le cas  $n = 2$ ,  $m = 3$  et  $d = 1$ .*

Le bruit  $n(t)$  est généralement un signal *analogique* qui perturbe la sortie analogique du processus  $y_p(t)$ . Comme on considère ici un modèle discret vu au travers de convertisseurs  $A/N$  et  $N/A$ , on note par  $n(k)$  la contribution *discrète* du bruit à la sortie  $y(k)$ . Le bruit  $n$  représente l'effet global de plusieurs sources d'erreur: erreurs de caractérisation, bruits de mesure, perturbations.

Il existe deux analyses possibles de l'identification selon que l'on considère la nature aléatoire du bruit comme négligeable et donc  $y$  de nature déterministe, ou alors le bruit comme un signal aléatoire important et  $y$  de nature stochastique. Ceci est décrit brièvement ci-dessous.

- Approche déterministe: La sortie d'un système déterministe est parfaitement déterminée à partir de ses entrées passées et présente. Bien que les processus réels soient rarement déterministes, si les erreurs de nature aléatoire (bruits de mesure) sont faibles, elles peuvent être ignorées et les signaux d'entrée et de sortie considérés comme parfaitement connus (déterministes). Les paramètres estimés sont alors également déterministes et peuvent être obtenus à partir d'un *nombre réduit de mesures*.
- Approche stochastique: Dans un système stochastique, le signal de sortie est de type aléatoire et change donc de manière imprévisible. Les paramètres estimés sont, à leur tour, des variables aléatoires qu'il convient de caractériser statistiquement. Le *nombre de mesures nécessaires est en général plus élevé* que pour une approche déterministe.

**Exemple** Soit le circuit électrique RCL donné à la figure 3.2. La mise en équation donne:

$$\begin{aligned} u &= LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c \\ y &= RC \frac{du_c}{dt} \end{aligned}$$

et ainsi la fonction de transfert suivante:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (3.12)$$

La fonction de transfert discrète de ce système du deuxième ordre est de la forme:

$$G(q^{-1}) = \frac{y(k)}{u(k)} = q^{-1} \frac{b_0 + b_1 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}} \quad (3.13)$$

Si le retard  $d$  était zéro,  $y(k)$  répondrait instantanément à un saut de tension  $u(k)$ , ce qui est impossible aux bornes d'une capacité. Le vecteur de paramètres, dans ce cas  $\theta = (a_1, a_2, b_0, b_1)^T$ , peut être identifié à partir de mesures de  $u(k)$  et  $y(k)$  comme on le verra plus loin. A partir de  $G(q^{-1})$ , on peut calculer une fonction de transfert analogique de la forme (cf. § 1.3.3.2):

$$G(s) = \frac{\beta s}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1} \quad (3.14)$$



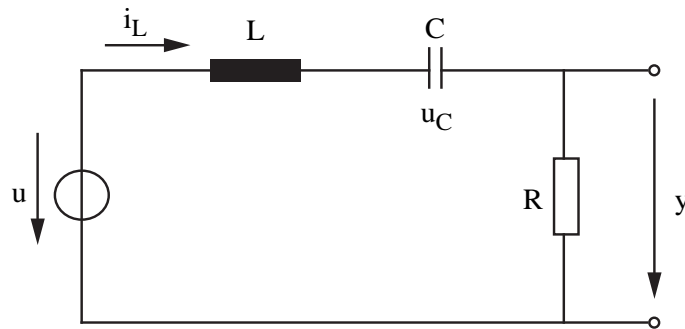


FIG. 3.2 – Schéma d'un circuit RCL.

L'identification des paramètres physiques se fait alors sur la base d'une comparaison des coefficients des fonctions de transfert (3.12) et (3.14):

$$LC = \alpha_2 \quad (3.15)$$

$$RC = \alpha_1 = \beta \quad (3.16)$$

Il s'agit là d'un système de deux équations algébriques non linéaires possédant trois inconnues  $R$ ,  $L$  et  $C$ . Il sera donc impossible d'identifier les paramètres physiques au-delà d'un facteur multiplicatif près.

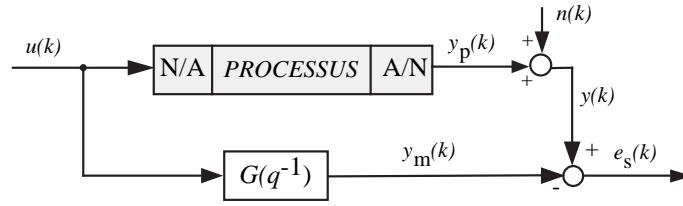
## 3.2 MODÈLE DU PROCESSUS

Les modèles d'identification utilisent le plus souvent une représentation *discrète*, bien que les processus physiques réels soient généralement de nature continue. Ceci résulte du fait que, d'une part, l'ordinateur qui se charge de l'identification «voit» un processus discret à travers les convertisseurs  $A/N$  et  $N/A$  et que, d'autre part, l'identification des paramètres, la synthèse du régulateur et la simulation du système sont plus simples sous forme numérique que sous forme analogique.

L'identification d'un modèle linéaire se base souvent sur une représentation externe fréquentielle, c'est-à-dire une fonction de transfert. Celle-ci est représentée dans le cas échantillonné par la forme générale de l'équation (3.3) ou (3.11). Il y a cependant des choix structurels importants à faire concernant la caractérisation de cette fonction de transfert, à savoir:

- le nombre de coefficients du polynôme  $A(q^{-1})$  (valeur de  $n$ ),
- le nombre de coefficients du polynôme  $B(q^{-1})$  (valeur de  $m + 1$ ),
- le retard (valeur de  $d \geq 1$ ).

Ces choix s'opèrent le plus souvent de façon itérative, en ce sens qu'un choix peut être corrigé *a posteriori* sur la base d'une analyse des résultats de l'identification. Pour un choix *a priori*, il est souvent recommandé de tester le système à l'aide d'un saut unité et d'en déduire approximativement l'ordre du système et le retard (cf. la méthode de Ziegler-Nichols, § 2.6.1.2).

FIG. 3.3 – Erreur de sortie  $e_s(k)$ .

### 3.3 CRITÈRES DE PERFORMANCE

Le choix du critère de performance à optimiser influencera non seulement le résultat de l'identification, mais également la méthode de calcul des paramètres. On utilise le plus souvent un critère quadratique basé sur une mesure de distance (ou erreur) entre les valeurs mesurées et celles prédites à l'aide du modèle.

#### 3.3.1 Critère basé sur l'erreur de sortie

L'erreur de sortie  $e_s(k)$  est la différence entre la sortie mesurée  $y(k)$  et la sortie du modèle  $y_m(k)$  qui résultent de la même excitation  $u(k)$ , comme cela est illustré à la figure 3.3. On a donc:

$$e_s(k) \equiv y(k) - y_m(k) = y_p(k) + n(k) - y_m(k) \quad (3.17)$$

Pour le modèle

$$G(q^{-1}) = \frac{y_m(k)}{u(k)} = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (3.18)$$

l'équation aux différences correspondante s'écrit:

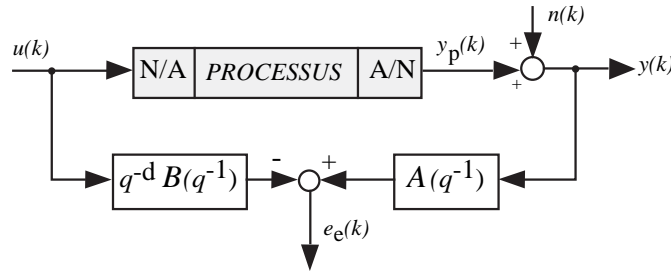
$$y_m(k) = -a_1 y_m(k-1) - \dots - a_n y_m(k-n) + b_0 u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \dots + b_m u(k-d-m) \quad (3.19)$$

La sortie du modèle  $y_m(k)$  dépend des paramètres  $a_i$  et  $b_j$ , ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$ ). Comme  $y_m(k-1), \dots, y_m(k-n)$  dépendent également de ces mêmes paramètres,  $y_m(k)$  est une fonction non linéaire de ces paramètres. Il s'ensuit que l'erreur de sortie est une fonction *non linéaire* des paramètres à identifier. On le voit également en considérant l'expression suivante pour l'erreur de sortie:

$$e_s(k) = y(k) - y_m(k) = y(k) - q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) \quad (3.20)$$

dans laquelle les paramètres  $a_i$  et  $b_j$  interviennent de façon non linéaire.

Afin d'exprimer la qualité d'un modèle proposé, on considère la somme des erreurs de sortie quadratiques. Pour déterminer le meilleur modèle, on minimisera

FIG. 3.4 – Erreur d'équation  $e_e(k)$ .

ensuite ce critère par rapport au vecteur de paramètres  $\theta = [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m]^T$ :

$$\min_{\theta} J(\theta) = \sum_{k=1}^N e_s^2(k) \quad (3.21)$$

où  $N$  représente le nombre de mesures disponibles.

La difficulté majeure de cette approche d'identification réside dans le fait qu'il s'agit là d'un problème de régression *non linéaire* avec l'existence possible de minima locaux. La section suivante définira un autre type d'erreur qui résultera en un problème de régression *linéaire*.

### 3.3.2 Critère basé sur l'erreur d'équation

En général, la sortie mesurée  $y$  diffère de  $y_m$ , celle du modèle. L'**erreur d'équation**  $e_e(k)$  représente l'erreur dans l'équation (3.19) lorsque la sortie du modèle  $y_m$  est remplacée par la sortie mesurée  $y$ :

$$e_e(k) \equiv y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) - b_0 u(k-d) - b_1 u(k-d-1) - \dots - b_m u(k-d-m) \quad (3.22)$$

L'erreur d'équation peut également s'écrire comme suit:

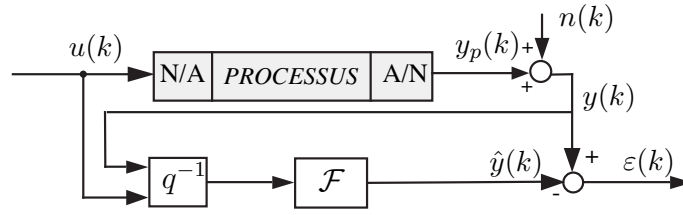
$$e_e(k) = A(q^{-1})y(k) - q^{-d}B(q^{-1})u(k) \quad (3.23)$$

et est donc la différence entre la sortie  $y(k)$  filtrée à l'aide du dénominateur  $A(q^{-1})$  de la fonction de transfert et l'entrée  $u(k)$  filtrée à l'aide du numérateur  $q^{-d}B(q^{-1})$  de la fonction de transfert (fig. 3.4).

Comme les échantillons  $u(k-d), \dots, u(k-d-m)$  sont donnés et les échantillons  $y(k), \dots, y(k-n)$  sont mesurés, l'erreur d'équation  $e_e(k)$  est linéaire par rapport aux paramètres  $\theta$ , c'est-à-dire  $a_i$  et  $b_j$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$ ).

On peut également écrire l'équation (3.22) sous la forme:

$$e_e(k) = y(k) - [-a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n) + b_0 u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \dots + b_m u(k-d-m)] \quad (3.24)$$

FIG. 3.5 – Erreur de prédiction  $\varepsilon(k)$ .

Dans le cas d'un modèle correct, on a  $y_m(k) = y_p(k)$  et donc  $y(k) = y_m(k) + n(k)$ . En remplaçant  $y(k)$  par  $y_m(k) + n(k)$  dans l'équation (3.23) et en utilisant l'équation (3.18), on obtient:

$$e_e(k) = A(q^{-1})n(k) \quad (3.25)$$

La minimisation de l'erreur d'équation quadratique s'écrit:

$$\min_{\theta} J(\theta) = \sum_{k=1}^N e_e^2(k) \quad (3.26)$$

et constitue un problème de régression *linéaire* par rapport aux paramètres  $\theta = [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m]^T$ .

### 3.3.3 Critère basé sur l'erreur de prédiction

L'erreur de prédiction  $\varepsilon(k)$  est la différence entre la sortie mesurée  $y(k)$  et la sortie prédite  $\hat{y}(k)$ . La sortie prédite à l'instant  $k$  est calculée à partir de toutes les informations disponibles jusqu'à l'instant  $k - 1$ . Cette sortie peut être présentée comme (fig. 3.5):

$$\hat{y}(k) = \mathcal{F}(\theta, u(k-1), u(k-2), \dots, y(k-1), y(k-2), \dots, \hat{y}(k-1), \hat{y}(k-2), \dots) \quad (3.27)$$

où  $\mathcal{F}$  est une fonction à définir. A la section 3.5, plusieurs prédicteurs seront définis et leur propriétés étudiées dans le cadre de la méthode de l'erreur de prédiction. Ici, on peut mentionner que l'erreur de sortie  $e_s(k)$  et l'erreur d'équation  $e_e(k)$  sont des cas particuliers de l'erreur de prédiction. Si l'on prend la sortie du modèle pour la sortie prédite ( $\hat{y}(k) = y_m(k)$ ) on retrouve le critère de l'erreur de sortie. Dans ce cas la sortie prédite s'écrit:

$$\hat{y}(k) = -a_1\hat{y}(k-1) - \dots - a_n\hat{y}(k-n) + b_0u(k-d) + \dots + b_mu(k-d-m) \quad (3.28)$$

L'erreur d'équation dans l'équation (3.24) peut aussi être écrite comme une erreur de prédiction en choisissant la sortie prédite égale au terme entre crochets de l'équation (3.24):

$$\hat{y}(k) = -a_1y(k-1) - \dots - a_ny(k-n) + b_0u(k-d) + \dots + b_mu(k-d-m) \quad (3.29)$$

Avec ce choix on obtient  $\varepsilon(k) = e_e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ .

### 3.3.4 Quel critère choisir?

Maintenant que nous avons introduit des critères de performance, encore convient-il de choisir le plus approprié! On pourrait penser que le critère basé sur l'erreur d'équation est préférable du fait qu'il génère un problème de régression *linéaire*. On verra à la section 3.5 que la qualité de la prédiction, et donc le choix du critère, dépendent essentiellement de la nature du bruit  $n(k)$ .

La relation entre le critère de l'erreur de sortie et l'erreur d'équation est simple à déterminer pour le cas hypothétique où les modèles identifiés en utilisant les critères basés sur l'erreur de sortie et l'erreur d'équation sont les mêmes. On calcule aisément une relation entre l'erreur d'équation  $e_e(k)$  et l'erreur de sortie  $e_s(k)$  à partir des équations (3.20) et (3.23):

$$e_e(k) = A(q^{-1})e_s(k) \quad (3.30)$$

*Est-ce que  $n(k) = 0$  est suffisant pour obtenir le même modèle avec les deux critères?*

## 3.4 ALGORITHME DES MOINDRES CARRÉS

Considérons le cas de la minimisation du critère quadratique basé sur l'erreur d'équation en utilisant la méthode des moindres carrés. Supposons que le système soit strictement causal ( $d \geq 1$ ).

*Cette supposition est-elle justifiée?*

A partir de l'équation (3.24), on a:

$$\varepsilon(k) = y(k) - \varphi^T(k)\theta \quad (3.31)$$

avec:

$$\varphi^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d), \dots, u(k-d-m)] \quad (3.32)$$

$$\theta^T = [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m] \quad (3.33)$$

où  $\varphi(k)$  représente le vecteur des variables explicatives (ou régresseur),  $\theta$  le vecteur des paramètres à identifier et  $\varepsilon(k)$  l'erreur d'équation écrite sous la forme générique d'erreur de prédiction.

Le terme  $\varphi^T(k)\theta$  correspond au terme entre crochets de l'équation (3.24) et représente donc la prédiction de  $y(k)$  obtenue à l'aide du modèle et des entrées et sorties mesurées (3.29). Le modèle (3.31) est *linéaire* par rapport aux paramètres à identifier  $\theta$ . L'algorithme des moindres carrés présenté ci-dessous sera valable pour tout modèle qui peut s'écrire sous la forme (3.31).

En accumulant  $N$  mesures, par exemple aux instants discrets  $k = 1, 2, \dots, N$ , l'équation (3.31) donne sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \vdots \\ \varepsilon(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix} \theta \quad (3.34)$$

que l'on note:

$$\mathcal{E} = Y - \Phi\theta \quad (3.35)$$

avec les dimensions suivantes:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &: (N \times 1) \text{ vecteur d'erreurs} \\ Y &: (N \times 1) \text{ vecteur de mesures} \\ \Phi &: (N \times p) \text{ matrice d'observations} \\ \theta &: (p \times 1) \text{ vecteur de paramètres} \end{aligned}$$

où  $p = n + m + 1$  représente le nombre de paramètres à identifier.

Remarquons que

$$\varphi^T(1) = [-y(0), \dots, -y(1-n), u(1-d), \dots, u(1-d-m)]$$

contient des éléments avec des indices de temps négatifs. Ces éléments sont inconnus et seront choisis nuls en supposant que le système dynamique soit initialement au repos. Si cela n'est pas le cas, on mettra l'entrée à zéro et attendra que le système atteigne l'état stationnaire (environ 3-5 constantes de temps) avant d'accumuler les  $N$  mesures. Si les mesures ont déjà été prises et ne proviennent pas d'un système initialement au repos, il convient alors d'identifier en plus les conditions initiales du système  $y(0), y(-1), \dots, y(1-n), u(1-d), \dots, u(1-d-m)$ , ce qui a pour effet de doubler le nombre de grandeurs à identifier!

La minimisation de l'erreur de prédiction quadratique s'écrit ainsi:

$$\begin{aligned} \min_{\theta} J(\theta) &= \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k) = \mathcal{E}^T \mathcal{E} \\ &= [Y - \Phi\theta]^T [Y - \Phi\theta] = Y^T Y - 2Y^T \Phi\theta + \theta^T \Phi^T \Phi\theta \end{aligned} \quad (3.36)$$

Le vecteur de paramètres  $\hat{\theta}$  qui minimise l'équation (3.36) annule le gradient de  $J$  par rapport à  $\theta$ :

$$\left. \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = -2\Phi^T Y + 2\Phi^T \Phi \hat{\theta} = 0 \quad (3.37)$$

d'où l'on tire:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (3.38)$$

que l'on écrit également:

$$\hat{\theta} = \Phi^+ Y \quad (3.39)$$

où  $\Phi^+$  représente la matrice pseudo-inverse de  $\Phi$  (cf. annexe B, équation B.17).

L'équation (3.37), également connue sous le nom d'**équation normale**, représente une condition nécessaire, mais non suffisante, à la minimisation de (3.36). On vérifiera également que  $\Phi$  soit de rang  $p$  et que le hessien de  $J$  par rapport à  $\theta$ , évalué à  $\hat{\theta}$ , soit une matrice symétrique définie positive:

$$\left. \frac{\partial^2 J(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = 2\Phi^T \Phi > 0 \quad (3.40)$$

Ceci implique que  $\hat{\theta}$  corresponde bien à un *minimum* de  $J$ . Le terme  $(\Phi^T\Phi)$  est une matrice carrée de dimension  $p$  appelée **matrice d'information**. Ses éléments dépendent, entre autres, du signal  $u(k)$  qui excite le système. En règle générale, cette matrice est régulière lorsque l'entrée  $u(k)$  est «suffisamment» excitée (cf. § 3.7.3). Si la matrice  $\Phi^T\Phi$  est singulière, l'équation (3.38) possède une infinité de solutions. Dans ce cas, il est possible de calculer la solution à norme minimale à l'aide de la relation (3.39) (cf. équation B.19).

L'estimée du vecteur de paramètres, donnée par l'équation (3.38), s'écrit également sous la forme équivalente suivante:

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \left[ \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \left[ \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k) \right] \\ &= \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k) \right]\end{aligned}\quad (3.41)$$

L'équation (3.41) indique que  $\hat{\theta}$  peut également être interprété comme le résultat d'une analyse de corrélation (cf. section 2.3) si le nombre de données  $N$  tend vers l'infini:

$$\hat{\theta} = R_{\varphi\varphi}^{-1}(0)R_{\varphi y}(0)\quad (3.42)$$

### 3.4.1 Formulation récurrente des moindres carrés

En vue d'une implantation sur ordinateur, l'équation (3.38) peut être transformée sous forme récurrente. En considérant les mesures jusqu'à l'instant  $kT$  et avec les notations suivantes similaires à celles de l'équation (3.34):

$$\mathcal{E}_k = \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \vdots \\ \varepsilon(k) \end{bmatrix} \quad Y_k = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} \quad \Phi_k = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(k) \end{bmatrix}\quad (3.43)$$

l'équation (3.41) donne:

$$\hat{\theta}_k = \left[ \sum_{i=1}^k \varphi(i)\varphi^T(i) \right]^{-1} \sum_{i=1}^k \varphi(i)y(i)\quad (3.44)$$

De cette manière,  $\hat{\theta}_k$  représente l'estimée de  $\theta$  au temps  $kT$  sur la base des  $k$  premières équations. Lorsque les mesures apparaissent successivement dans le temps, il est intéressant de calculer  $\hat{\theta}_k, \hat{\theta}_{k+1}, \dots$  par récurrence, c'est-à-dire de calculer  $\hat{\theta}_{k+1}$  à partir de  $\hat{\theta}_k$  sans effectuer chaque fois l'inversion matricielle indiquée par l'équation (3.44). Pour ce faire on re-écrit l'équation (3.44) comme suit:

$$\hat{\theta}_k = P_k \sum_{i=1}^k \varphi(i)y(i)\quad (3.45)$$

où la matrice carrée  $P_k$  de dimension  $p$  (nombre de paramètres) est l'inverse de la matrice d'information. Si la structure du modèle est correcte, la matrice  $P_k$  est *asymptotiquement* proportionnelle à la covariance de l'erreur d'estimation.

$$P_k = \left[ \sum_{i=1}^k \varphi(i)\varphi^T(i) \right]^{-1} \quad (3.46)$$

Notons également que la matrice  $P_{k+1}^{-1}$  peut se calculer de façon récurrente comme suit:

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{-1} &= \sum_{i=1}^{k+1} \varphi(i)\varphi^T(i) = \sum_{i=1}^k \varphi(i)\varphi^T(i) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1) \\ &= P_k^{-1} + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Le vecteur de paramètres à l'instant  $k+1$  peut s'écrire:

$$\hat{\theta}_{k+1} = P_{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \varphi(i)y(i) = P_{k+1} \left[ \sum_{i=1}^k \varphi(i)y(i) + \varphi(k+1)y(k+1) \right] \quad (3.48)$$

$$= P_{k+1} [P_k^{-1} \hat{\theta}_k + \varphi(k+1)y(k+1)] \quad (3.49)$$

$$= P_{k+1} [P_{k+1}^{-1} - \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)] \hat{\theta}_k + P_{k+1} \varphi(k+1)y(k+1) \quad (3.50)$$

$$= \hat{\theta}_k + P_{k+1} \varphi(k+1) [y(k+1) - \varphi^T(k+1) \hat{\theta}_k] \quad (3.51)$$

Le terme entre crochets correspond à l'erreur de prédiction  $\varepsilon(k+1)$  calculée à partir de  $\hat{\theta}_k$ . Cette erreur est pondérée par le gain  $P_{k+1}\varphi(k+1)$ , ce qui génère une correction de  $\hat{\theta}_k$  proportionnelle à l'erreur de prédiction.

L'algorithme des moindres carrés peut être présenté par les deux équations récurrentes suivantes:

$$P_{k+1}^{-1} = P_k^{-1} + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1) \quad (3.52)$$

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + P_{k+1} \varphi(k+1) [y(k+1) - \varphi^T(k+1) \hat{\theta}_k] \quad (3.53)$$

A l'instant  $k+1$ , on mesure  $y(k+1)$  et on construit le vecteur  $\varphi(k+1)$ . Puis, on calcule  $P_{k+1}^{-1}$  à partir de l'équation (3.52) et enfin  $\hat{\theta}_{k+1}$  à partir de l'équation (3.53).

Comme la matrice  $\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)$  est définie non-négative, l'équation (3.52) montre que la matrice  $P_{k+1}^{-1}$  augmente de façon monotone avec  $k$ . Il s'ensuit que  $P_{k+1}$ , et donc également le gain  $P_{k+1}\varphi(k+1)$  dans l'équation (3.53), diminuent avec  $k$ , résultant ainsi en une identification qui aura de plus en plus de peine à corriger le vecteur  $\hat{\theta}_k$  sur la base de l'erreur de prédiction  $\varepsilon(k+1)$ . La pondération des mesures par l'introduction d'un facteur d'oubli permettra de remédier à ce problème.

Pour éviter l'inversion de la matrice  $P_{k+1}$  à chaque itération, on peut utiliser la lemme d'inversion matricielle. Selon cette lemme soient  $A, C$  et  $C^{-1} + DA^{-1}B$  des matrices inversibles, alors:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1} \quad (3.54)$$



Il est facile à démontrer que  $(A + BCD)(A^{-1} - A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1}) = I$ .

Prenons  $A = P_k^{-1}$ ,  $B = \varphi(k+1)$ ,  $C = 1$ ,  $D = \varphi^T(k+1)$  dans l'équation (3.52), on obtient:

$$P_{k+1} = P_k - \frac{P_k \varphi(k+1) \varphi^T(k+1) P_k}{1 + \varphi^T(k+1) P_k \varphi(k+1)} \quad (3.55)$$

Cette équation a l'avantage de ne pas nécessiter l'inversion d'une matrice, mais uniquement celle d'un scalaire.

Il existe deux façons d'initialiser la récurrence:

- des valeurs initiales sont fixées, généralement  $\hat{\theta}_0 = 0$  et  $P_0 = \alpha I$  où  $\alpha$  représente un très grand scalaire (par exemple  $\alpha = 10000$ ) et  $I$  la matrice unité,
- la récurrence commence à l'itération  $p+1$  (si l'on estime  $p$  paramètres) avec:

$$\hat{\theta}_p = \Phi_p^{-1} y_p \quad \text{et} \quad P_p = [\Phi_p^T \Phi_p]^{-1} \quad (3.56)$$

Il est utile de mentionner qu'il existe d'autres formules récurrentes, équivalentes à celles présentées ci-dessus, mais mieux conditionnées pour les calculs numériques (équations «stabilisées», équations «factorisées»). Elles sont cependant moins didactiques et ne sont pas données ici.

Par rapport à l'algorithme batch (ou par paquet) des moindres carrés donné à l'équation (3.38), l'identification récurrente offre les avantages suivants:

- estimation du modèle en temps réel,
- compression importante des données, car l'algorithme récurrent traite à chaque instant une seule paire entrée/sortie au lieu de l'ensemble des données,
- exigences mémoire et puissance de calcul plus faibles,
- implantation aisée sur microprocesseur.

## 3.4.2 Moindres carrés pondérés

### 3.4.2.1 Principe

Avec  $N$  mesures aux instants discrets  $k = 1, 2, \dots, N$ , l'erreur de prédiction s'écrit (cf. équation 3.35):

$$\mathcal{E} = Y - \Phi\theta \quad (3.57)$$

Cette équation matricielle comporte  $N$  lignes. Toutes les erreurs de prédiction  $\varepsilon(1), \dots, \varepsilon(N)$  ne doivent pas nécessairement avoir la même importance dans le critère quadratique. Il est possible de les pondérer, par exemple comme suit:

$$\mathcal{E}_W \equiv W[Y - \Phi\theta] \quad (3.58)$$

où  $W$  est une matrice de pondération de dimension  $(N \times N)$ .

Les éléments de  $\mathcal{E}_W$  se calculent de la manière suivante à partir des éléments de  $W$  et de  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E}_W(i) = \sum_{j=1}^N w_{ij} \varepsilon(j) \quad i = 1, \dots, N \quad (3.59)$$

On choisit souvent une matrice de pondération diagonale, ce qui permet d'écrire:

$$\mathcal{E}_W(i) = w_{ii}\varepsilon(i) \quad i = 1, \dots, N \quad (3.60)$$

Le critère quadratique suivant est ensuite minimisé:

$$J(\theta) = \mathcal{E}_W^T \mathcal{E}_W = \mathcal{E}^T W^T W \mathcal{E} = [Y - \Phi\theta]^T W^T W [Y - \Phi\theta] \quad (3.61)$$

Le vecteur des paramètres estimés devient alors (cf. équation 3.38):

$$\hat{\theta} = (\Phi^T W^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W^T W Y \quad (3.62)$$

### 3.4.2.2 Choix de la matrice de pondération

Un critère de choix indique que les mesures plus anciennes possèdent une influence réduite dans le calcul des paramètres actuels. L'influence des mesures plus anciennes est artificiellement réduite par l'introduction du facteur d'oubli  $\lambda$ , par exemple:

$$W^T W = \begin{bmatrix} \lambda^{N-1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda^1 & \\ 0 & & & \lambda^0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } \lambda \leq 1 \text{ (souvent } 0.9 \leq \lambda \leq 0.99) \quad (3.63)$$

### 3.4.2.3 Moindres carrés pondérés récurrents

A partir de l'équation (3.62) et (3.63), on obtient:

$$\hat{\theta}_k = \left[ \sum_{i=1}^k \varphi(i) \lambda^{k-i} \varphi^T(i) \right]^{-1} \sum_{i=1}^k \varphi(i) \lambda^{k-i} y(i) = P_k \sum_{i=1}^k \varphi(i) \lambda^{k-i} y(i) \quad (3.64)$$

La matrice  $P_{k+1}$  se calcule de façon récurrente comme suit:

$$P_{k+1}^{-1} = \lambda P_k^{-1} + \varphi(k+1) \varphi^T(k+1) \quad (3.65)$$

L'introduction d'un facteur d'oubli permet d'éviter une diminution trop rapide des éléments de la matrice  $P_{k+1}$  ce qui résulterait en un gain  $P_{k+1} \varphi(k+1)$  faible et ainsi en une correction trop petite de  $\hat{\theta}_k$ . En suivant la même démarche pour l'algorithme des moindres carrés récurrente et le lemme d'inversion matricielle, on obtient la formulation suivante avec le facteur d'oubli:

$$P_{k+1} = \frac{1}{\lambda} \left[ P_k - \frac{P_k \varphi(k+1) \varphi^T(k+1) P_k}{\lambda + \varphi^T(k+1) P_k \varphi(k+1)} \right] \quad (3.66)$$

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + P_{k+1} \varphi(k+1) [y(k+1) - \varphi^T(k+1) \hat{\theta}_k] \quad (3.67)$$

L'introduction du facteur d'oubli  $\lambda$  permet également d'identifier des paramètres qui varient lentement dans le temps. Un  $\lambda$  plus petit permet une meilleure « poursuite » de paramètres variables, alors qu'un  $\lambda$  plus grand permet une meilleure élimination des perturbations par effet de lissage.

### 3.4.2.4 Exemple

Considérons le système dynamique du premier ordre:

$$y(k) + a_0 y(k-1) = b_0 u(k-1) + e_0(k)$$

avec  $\theta_0 = [a_0 \ b_0]^T$  les vrais paramètres du système,  $u(k)$  l'entrée spécifiée,  $y(k)$  la sortie mesurée et  $e_0(k)$  un bruit blanc de moyenne nulle. Remarquons que dans cet exemple  $e_0(k)$  ne correspond pas au traditionnel bruit additif sur la sortie («bruit de sortie»), mais plutôt à un «bruit d'équation» blanc.

L'objectif est d'estimer le vecteur de paramètres  $\theta$  sur la base des séquences d'entrée et de sortie  $u(k)$  et  $y(k)$ . La minimisation du critère quadratique basé sur l'erreur d'équation sera utilisé.

**Système stationnaire:** Le cas d'un système stationnaire est d'abord considéré:  $\theta_0 = [-0.5 \ 0.5]^T$ .

Les figures 3.6a et 3.6b représentent le signal d'entrée échelon  $u(k)$  utilisé ainsi que la réponse bruitée  $y(k)$ . Pour  $\hat{\theta}_0 = [0 \ 0]^T$  et  $P_0 = I$ , les équations (3.52)-(3.53) permettent d'estimer les paramètres du système (fig. 3.6c) et la matrice  $P$  appelée communément la matrice de covariance de l'erreur d'estimation (fig. 3.6d). On remarque que les paramètres estimés convergent rapidement vers les vraies valeurs et que les éléments de la matrice  $P$  tendent vers 0 ( $P_{21} = P_{12}$  puisque la matrice  $P$  est symétrique). Un tel algorithme aura de la peine à corriger le vecteur  $\hat{\theta}_k$  sur la base de l'erreur de prédiction car le gain  $P_{k+1}\varphi(k+1)$  dans l'équation (3.53) est faible. On le verra très bien dans le cas suivant.

**Système non stationnaire, sans facteur d'oubli:** Le système varie maintenant dans le temps comme suit:

$$\theta_0 = \begin{cases} [-0.5 & 0.5]^T \\ [0.5 & -0.5]^T \end{cases} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} k < 200 \\ k \geq 200 \end{cases}$$

Le même algorithme que précédemment est utilisé et donne les résultats représentés à la figure 3.7. On remarque que les paramètres estimés ne convergent pas vers les vraies valeurs car la matrice  $P$ , et donc le gain  $P\varphi$ , sont trop faibles pour forcer une correction lorsque le système change à  $k = 200$ . Il faudra introduire un facteur d'oubli de façon à ce que les éléments de  $P$  ne tendent pas asymptotiquement vers 0.

**Système non stationnaire, avec facteur d'oubli:** Pour le système non stationnaire précédent, l'utilisation d'un facteur d'oubli ( $\lambda = 0.97$ ) permet de conserver un gain suffisant pour suivre la variation des paramètres. Les éléments de  $P$  augmentent (grâce à  $\lambda < 1$ ) lorsque l'excitation du système est faible mais, comme auparavant, diminuent rapidement lorsque le système est fortement excité (il est intéressant de

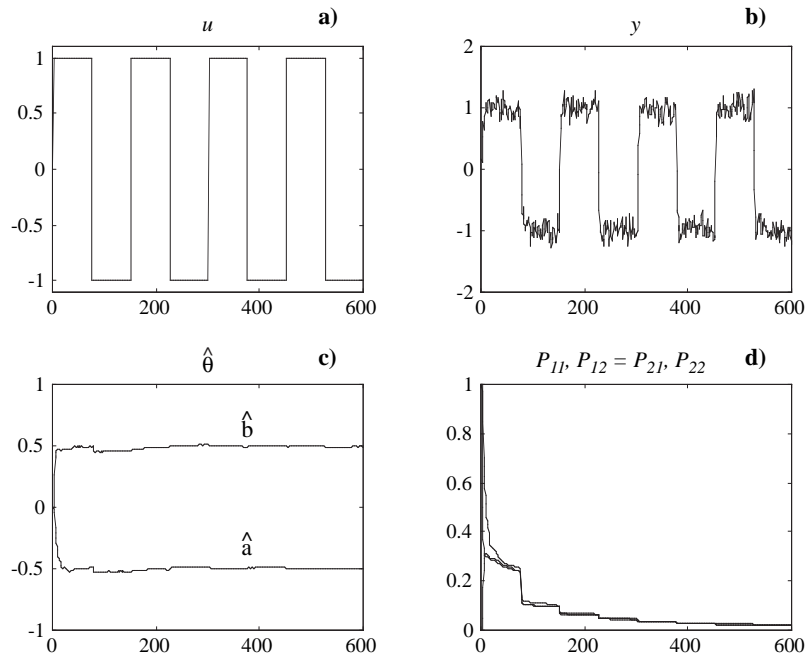


FIG. 3.6 – Identification des paramètres d'un système stationnaire: (a) signal d'entrée; (b) sortie bruitée; (c) paramètres estimés; (d) éléments de la matrice  $P$ .

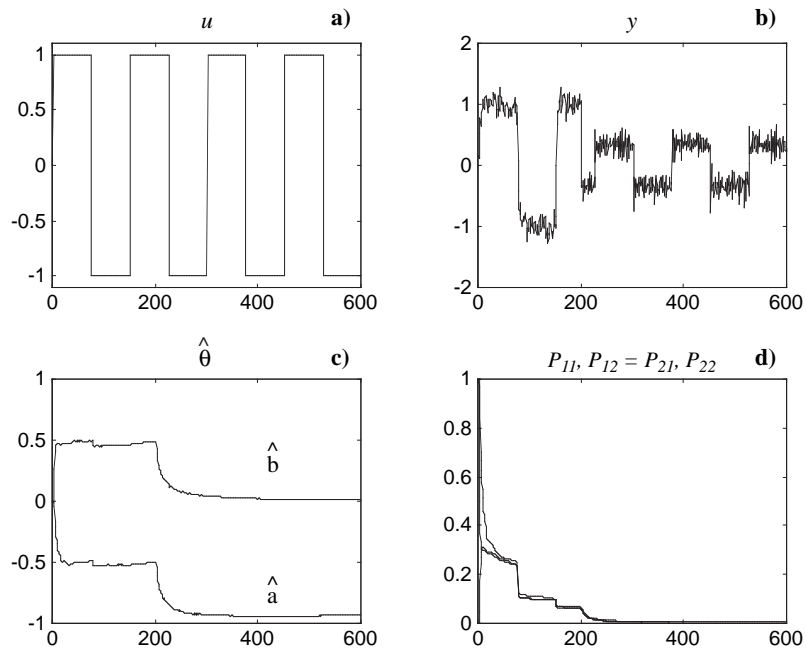


FIG. 3.7 – Identification des paramètres d'un système non stationnaire sans facteur d'oubli: (a) signal d'entrée; (b) sortie bruitée; (c) paramètres estimés; (d) éléments de la matrice  $P$ .

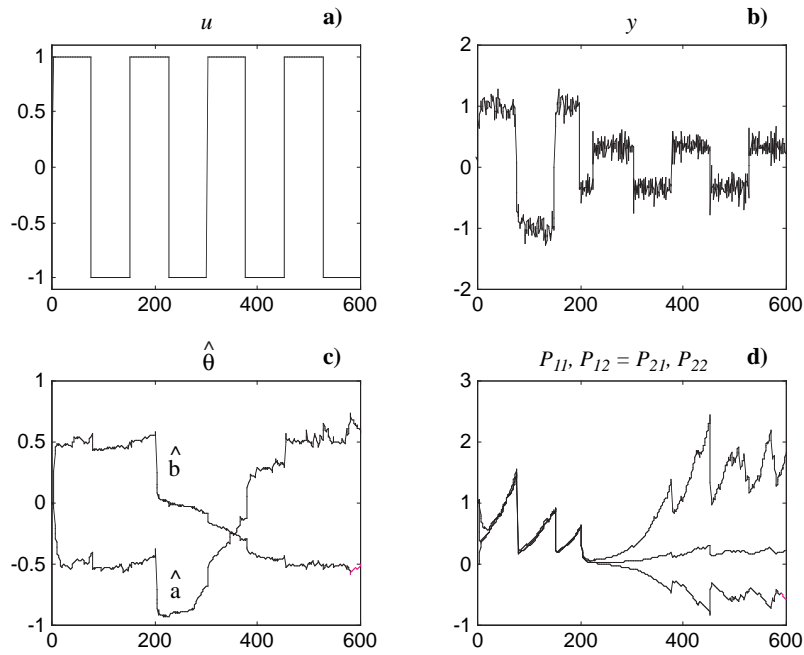


FIG. 3.8 – Identification des paramètres d'un système non stationnaire avec facteur d'oubli ( $\lambda = 0.97$ ): (a) signal d'entrée; (b) sortie bruitée; (c) paramètres estimés; (d) éléments de la matrice  $P$ .

comparer le comportement des éléments de  $P$  dans les figures 3.7d et 3.8d). Comme le gain d'adaptation reste suffisant, l'algorithme peut ajuster correctement la valeur des paramètres (fig. 3.8c).

### 3.4.3 Erreur et variance d'estimation

Considérons le problème de régression linéaire pour la minimisation de l'erreur de prédiction (en fait l'erreur d'équation) quadratique.

On suppose que le processus puisse être représenté par le *vrai modèle* suivant:

$$A_0(q^{-1})y(k) = q^{-d_0}B_0(q^{-1})u(k) + e_0(k) \quad (3.68)$$

avec les (vrais) polynômes  $A_0(q^{-1})$  et  $B_0(q^{-1})$  et le (vrai) bruit d'équation  $e_0(k)$ . La sortie de ce modèle s'écrit:

$$\begin{aligned} y(k) &= -a_1^0 y(k-1) - \dots - a_{n_0}^0 y(k-n_0) + b_0^0 u(k-d_0) + \dots + b_{m_0}^0 u(k-d_0-m_0) + e_0(k) \\ &= \varphi^T(k)\theta_0 + e_0(k) \end{aligned} \quad (3.69)$$

où  $\theta_0$  est le vecteur de vrais paramètres. On peut expliciter les paramètres du modèle du processus sous la forme régressive vectorielle suivante:

$$Y = \Phi\theta_0 + E_0 \quad (3.70)$$

avec  $E_0^T = [e_0(1), \dots, e_0(N)]$ .

L'erreur de prédiction sous forme matricielle s'écrit (3.35):

$$\mathcal{E} = Y - \Phi\theta \quad (3.71)$$

où  $\theta$  est le vecteur des paramètres à identifier et  $\mathcal{E}$  le vecteur des erreurs de prédiction à minimiser. Pour le cas d'une *structure de modèle correcte* (c'est-à-dire  $n = n_0$ ,  $m = m_0$  et  $d = d_0$ ), en combinant ces deux dernières équations, on peut expliciter le vecteur des erreurs de prédiction comme suit:

$$\mathcal{E} = Y - \Phi\theta = (\Phi\theta_0 + E_0) - \Phi\theta = \Phi(\theta_0 - \theta) + E_0 \quad (3.72)$$

On minimise ensuite cette erreur de prédiction quadratique pour obtenir le vecteur de paramètres  $\hat{\theta}$ . On peut alors définir l'erreur d'estimation comme suit (cf. équations 3.38, 3.41 et 3.70):

$$\tilde{\theta} \equiv \hat{\theta} - \theta_0 = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^TY - (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\Phi\theta_0 = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^TE_0 \quad (3.73)$$

$$= \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)e_0(k) \right] \quad (3.74)$$

Comme  $E_0$  est un vecteur de variables aléatoires, le vecteur des paramètres estimés  $\hat{\theta}$  le sera aussi. Si le nombre de données  $N$  tend vers l'infini, la valeur moyenne de l'erreur d'estimation ou *biais* est égale à:

$$E\{\hat{\theta} - \theta_0\} = R_{\varphi\varphi}^{-1}(0)R_{\varphi e_0}(0) \quad (3.75)$$

Ainsi, le biais sera nulle si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

1. la matrice  $R_{\varphi\varphi}(0)$  est régulière,
2.  $R_{\varphi e_0}(0) = 0$

La condition 1 est remplie si le système est «suffisamment» excité (cf. § 3.7.3). La condition 2 impose que le bruit d'équation  $e_0(k)$  du (vrai) système ne soit pas corrélé avec le régresseur  $\varphi(k)$ . Cette condition est vérifiée si  $e_0(k)$  est un bruit blanc. Mais en réalité, il est très peu probable que  $e_0(k)$  soit blanc. Supposons que  $e_0(k)$  est un bruit coloré et peut s'exprimer comme  $C_0(q^{-1})e(k)$ , c'est-à-dire le bruit blanc de moyenne nulle  $e(k)$  filtré par le polynôme  $C_0(q^{-1}) = 1 + c_1^0q^{-1} + \dots + c_p^0q^{-p}$ .

$R_{\varphi e_0}(0)$  devient ainsi:

$$R_{\varphi e_0}(0) = E \begin{bmatrix} -y(k-1) \\ \vdots \\ -y(k-n) \\ u(k-d) \\ \vdots \\ u(k-d-m) \end{bmatrix} [e(k) + c_1^0e(k-1) + \dots + c_p^0e(k-p)] \quad (3.76)$$

avec, à partir de (3.68):

$$y(k) = [1 - A_0(q^{-1})]y(k) + B_0(q^{-1})u(k-d) + C_0(q^{-1})e(k) \quad (3.77)$$

En général,  $R_{\varphi e_0} \neq 0$  car, par exemple,  $e(k-1)$  influence à la fois  $e_0(k)$  et  $\varphi(k)$  par l'intermédiaire de  $y(k-1)$ .

La matrice de covariance des paramètres estimés peut être déterminée à partir de l'équation (3.73):

$$\text{cov}(\hat{\theta}) = E\{(\hat{\theta} - \theta_0)(\hat{\theta} - \theta_0)^T\} = E\{(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T E_0 E_0^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1}\} \quad (3.78)$$

Si le bruit d'équation  $e_0(k)$  est blanc nous avons  $E\{E_0 E_0^T\} = \sigma_0^2 I$ , où  $\sigma_0^2$  est la variance du bruit  $e_0(k)$  et  $I$  est la matrice unité. On obtient donc:

$$\text{cov}(\hat{\theta}) = \sigma_0^2 E\{(\Phi^T \Phi)^{-1}\} = \frac{\sigma_0^2}{N} E \left\{ \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \right\} \quad (3.79)$$

Lorsque le nombre de données tend vers l'infini la matrice de covariance s'écrit:

$$\text{cov}(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_0^2}{N} R_{\varphi\varphi}^{-1}(0) \quad (3.80)$$

Comme on pouvait l'imaginer, la variance des paramètres dépend proportionnellement à la variance du bruit. Pour avoir une meilleure estimation des paramètres, un signal d'excitation plus riche doit être choisi afin que la matrice d'information devienne plus importante. On peut toujours augmenter le nombre de données  $N$  pour réduire la variance des paramètres.

De façon générale, la méthode des moindres carrés basée sur l'erreur d'équation est simple à mettre en œuvre (régression *linéaire*) mais donne souvent des estimations biaisées car l'erreur d'équation est corrélée avec le régresseur. C'est l'élimination du biais en présence d'erreurs (perturbations, bruit de mesure, erreurs de modèle) qui est à l'origine du développement de la plupart des méthodes d'identification. Celles-ci se classent en deux catégories, selon l'approche choisie pour réduire le biais:

- méthodes basées sur la décorrélation d'un vecteur d'observations auxiliaire et de l'erreur de prédiction: méthode des variables instrumentales,
- méthodes basées sur l'introduction d'un modèle du bruit et minimisation de l'erreur de prédiction.

#### 3.4.4 Méthode des variables instrumentales

Dans l'approche d'identification des paramètres par moindres carrés linéaires, l'erreur d'estimation s'annule lorsque le bruit d'équation  $e_0(k)$  n'est pas corrélée avec le vecteur d'observations ( $R_{\varphi e_0}(0) = 0$ ). Une solution consiste à créer un vecteur d'observations auxiliaire  $\varphi_a$  qui soit, par construction, non corrélé avec le bruit de manière à obtenir également  $R_{\varphi_a e_0}(0) \cong 0$ .

La méthode des variables instrumentales (instrumental variable method, IV) implante cette solution. Elle relève fondamentalement des techniques de corrélation et est donc fondée sur des considérations statistiques dont la validité nécessite un grand nombre de mesures ( $N \rightarrow \infty$ ). L'idée est de remplacer la solution des moindres carrés linéaires (équation 3.38) par:

$$\hat{\theta}_{IV} = (\Phi_{IV}^T \Phi)^{-1} \Phi_{IV}^T Y \quad (3.81)$$

où  $\Phi_{IV}$  est une matrice de variables instrumentales (ou, de manière équivalente,  $\varphi_{IV}$  est un vecteur de variables instrumentales).

Une analyse tout à fait similaire à celle de la section 3.4.3 indique que l'erreur d'estimation sera nulle si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- la matrice  $\Phi_{IV}^T \Phi$  est régulière,
- $R_{\varphi_{IV}e_0}(0) = 0$

ce qui signifie que les variables instrumentales doivent être corrélées avec le régresseur  $\varphi$  mais non corrélées avec le bruit  $e_0$ . Pour un nombre fini de données,  $R_{\varphi_{IV}e_0}(0)$  n'est pas nulle mais elle sera très petite. Il en résulte que la grandeur du biais dépendra aussi de la grandeur de la matrice  $\Phi_{IV}^T \Phi$ . Le meilleur vecteur de variables instrumentales est celui qui rend le plus grand possible la matrice  $\Phi_{IV}^T \Phi$ . Pour cela,  $\varphi_{IV}(k)$  doit être une approximation non bruitée du régresseur  $\varphi(k)$ .

Plusieurs possibilités existent pour le choix des variables instrumentales, notamment:

1. Décalage de  $h$  coups d'horloge des variables bruitées dans le régresseur  $\varphi$

$$\varphi_{IV}^T(k) = [-y(k-h-1) \dots -y(k-h-n) \ u(k-d-1) \dots u(k-d-m)] \quad (3.82)$$

où le retard des observations doit satisfaire la condition  $h \geq \deg[C_0(q^{-1})]$ ,  $C_0(q^{-1})$  étant le polynôme permettant de générer  $e_0(k)$  à partir du bruit blanc de moyenne nulle  $e(k)$ . Notons que si  $e_0(k)$  est un bruit blanc,  $\deg[C_0(q^{-1})] = 0$  et  $h \geq 0$ , c'est-à-dire qu'un décalage n'est pas nécessaire pour éliminer asymptotiquement l'erreur d'estimation.

D'autre part, pour que les observations retardées de la sortie soient représentatives, la période d'échantillonnage ne doit pas être trop petite. Il s'ensuit que cette approche est applicable seulement si le bruit (perturbations, bruit de mesure) est de haute fréquence par rapport à la bande passante du processus.

2. Construction des variables instrumentales à l'aide d'un modèle auxiliaire

$$\varphi_{IV}^T(k) = [-y_M(k-1) \dots -y_M(k-n) \ u(k-d-1) \dots u(k-d-m)] \quad (3.83)$$

où  $y_M(k)$  est une approximation de  $y_p(k)$  (la sortie non bruitée) générée à partir d'un modèle auxiliaire dont l'entrée est  $u(k)$ . Comme il faut disposer d'un modèle auxiliaire suffisamment représentatif, on initialise souvent cette approche avec la solution obtenue à partir des moindres carrés linéaires. L'avantage de ce choix est qu'il n'a pas besoin d'informations et d'hypothèses sur le bruit.



## 3.5 MÉTHODE DE L'ERREUR DE PRÉDICTION

Le problème d'identification paramétrique peut être étudié dans un cadre plus général avec la méthode de l'erreur de prédiction. Cette méthode est basée sur les trois étapes suivantes:

1. Choisir la structure du modèle du système. Le choix de la structure dépend des hypothèses sur l'ordre du modèle du processus et la nature du bruit. Deux hypothèses différentes pour le bruit sont considérées:
  - (a) Le bruit n'est pas corrélé avec l'entrée du processus. Cette hypothèse conduit aux structures sans modèle du bruit.
  - (b) Le bruit sur la sortie est un bruit blanc filtré par un filtre d'ordre fini. Cette hypothèse conduit aux structures avec modèle du bruit.
2. Définir le prédicteur de la sortie en relation avec la structure du modèle. Le prédicteur est une fonction des paramètres du modèle à identifier ( $\theta$  inconnu) et des signaux d'entrée et sortie,  $\hat{y}(k) = \mathcal{F}(\theta, y(k-1), \dots, u(k-1), \dots)$ . En règle générale, le prédicteur est défini tel que l'erreur de prédiction pour le meilleur prédicteur  $\mathcal{F}(\theta_0, y(k-1), \dots, u(k-1), \dots)$  (où  $\theta_0$  est le vecteur de paramètres du *vrai* modèle) ne soit pas corrélée avec l'entrée pour l'hypothèse (a) ou soit blanche pour l'hypothèse (b). Ce choix sera justifié par la suite.
3. Minimiser l'erreur de prédiction avec une méthode numérique. Après avoir défini le prédicteur pour la structure choisie, on obtient l'erreur de prédiction  $\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k)$  qui est une fonction du vecteur des paramètres à identifier  $\theta$ . On obtient ainsi un problème d'optimisation numérique dont le critère à minimiser est la norme 2 de l'erreur de prédiction:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k) \quad (3.84)$$

Ce critère peut être minimisé à l'aide de l'algorithme itératif de Gauss-Newton qui nous donne un minimum local du critère. On peut également résoudre ce problème d'optimisation non linéaire avec la régression pseudo-linéaire qui est exploitée au § 3.5.3.1.

### 3.5.1 Structures sans modèle du bruit

#### 3.5.1.1 Structure OE

Supposons que la sortie mesurée du système puisse être exprimée comme suit:

$$y(k) = G_0(q^{-1})u(k) + n(k) \quad (3.85)$$

où  $n(k)$  est un bruit stationnaire à moyenne nulle indépendant de l'entrée et  $G_0(q^{-1})$  est le *vrai* modèle du système avec une fonction de transfert d'ordre fini représentée par:

$$G_0(q^{-1}) = \frac{q^{-d_0} B_0(q^{-1})}{A_0(q^{-1})} \quad (3.86)$$

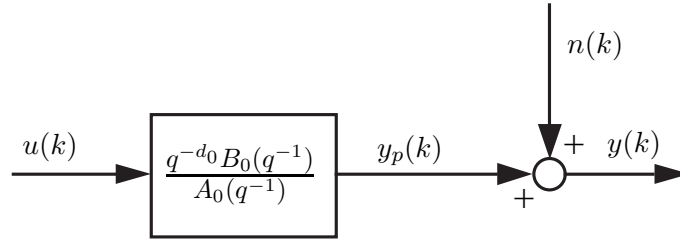


FIG. 3.9 – Structure OE

avec

$$B_0(q^{-1}) = b_0^0 + b_1^0 q^{-1} + \dots + b_{m_0}^0 q^{-m_0} \quad (3.87)$$

$$A_0(q^{-1}) = 1 + a_1^0 q^{-1} + \dots + a_{n_0}^0 q^{-n_0} \quad (3.88)$$

$$\theta_0^T = [a_1^0, \dots, a_{n_0}^0, b_0^0, \dots, b_{m_0}^0] \quad (3.89)$$

La structure du modèle présentée à l'équation (3.85) et à la figure 3.9 est connue sous le nom de la structure de l'erreur de sortie (output error, OE).

Considérons l'équation (3.85) et supposons qu'on soit à l'instant  $k - 1$  et qu'on veuille prédire la sortie du système à l'instant  $k$  (prédicteur à un pas). La sortie mesurée peut s'écrire  $y(k) = y_p(k) + n(k)$ . Il est évident que la sortie du modèle du processus  $y_p(k)$  peut être facilement calculée avec les informations disponibles à l'instant  $k - 1$  à condition que les paramètres du vrai modèle  $G_0(q^{-1})$  soient parfaitement connus. Par contre, étant un signal aléatoire, le bruit  $n$  n'est pas prévisible avant sa réalisation à l'instant  $k$ . Donc le meilleur prédicteur pour la structure de l'erreur de sortie est:

$$\hat{y}(k, \theta_0) = G_0(q^{-1})u(k) \quad (3.90)$$

où  $\hat{y}(k, \theta_0)$  est la sortie prédite à l'instant  $k$  qui dépend du vecteur de paramètres du vrai modèle  $\theta_0$ . Comme  $\theta_0$  est en principe inconnu, on peut construire un prédicteur paramétrisé où le vecteur  $\theta_0$  est remplacé par un vecteur de paramètres inconnu  $\theta$  comme suit:

$$\hat{y}(k, \theta) = G(q^{-1}, \theta)u(k) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) \quad (3.91)$$

où  $G(q^{-1}, \theta)$  est l'ensemble des modèles candidats pour le vrai modèle avec:

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m} \quad (3.92)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n} \quad (3.93)$$

$$\theta^T = [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m] \quad (3.94)$$

Si  $d_0 = d$ ,  $m_0 = m$  et  $n_0 = n$ , on dit que  $G_0(q^{-1})$  appartient à l'ensemble des modèles  $G(q^{-1})$ , c'est-à-dire  $G(q^{-1}, \theta_0) = G_0(q^{-1})$ .

La sortie prédite est en effet la sortie du modèle  $y_m$  et l'erreur de prédiction pour cette structure est l'erreur de sortie  $e_s(k)$  déjà définie au § 3.3.1. L'erreur de

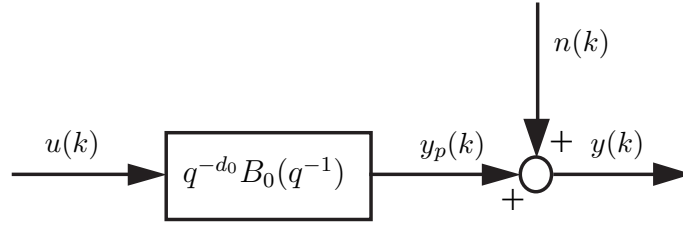


FIG. 3.10 – Structure FIR

prédiction s'écrit:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k, \theta) &= G_0(q^{-1})u(k) + n(k) - G(q^{-1})u(k) \\ &= [G_0(q^{-1}) - G(q^{-1})]u(k) + n(k) \end{aligned} \quad (3.95)$$

A partir de cette équation, on observe que si  $G_0(q^{-1})$  appartient à l'ensemble des modèles et  $\theta = \theta_0$ , c'est-à-dire  $G(q^{-1}) = G_0(q^{-1})$ , l'erreur de prédiction sera égale au bruit  $\varepsilon(k, \theta_0) = n(k)$ . Alors, pour  $\hat{\theta} = \theta_0$ , l'erreur de prédiction ne sera pas corrélée avec l'entrée du processus. Cette propriété intéressante peut être utilisée pour la validation du modèle identifié.

Cette structure est la meilleure structure pour identifier un modèle si le but d'identification est de trouver un modèle de simulation et on n'a pas besoin d'un modèle du bruit. Cependant, les paramètres du modèle interviennent de façon non linéaire dans l'équation de l'erreur de prédiction (en faite l'erreur de sortie) et par conséquent cela conduit à un problème de régression non linéaire pour lequel un optimum global ne peut pas être garanti facilement.

### 3.5.1.2 Structure FIR

Un cas particulier de la structure OE est le cas où  $n_0 = 0$  ou  $A_0(q^{-1}) = 1$ . Ceci est nommé la structure de FIR (finite impulse response ou réponse impulsionnelle finie) (fig. 3.10).

Pour cette structure on a:

$$y(k) = q^{-d} B_0(q^{-1})u(k) + n(k) \quad (3.96)$$

La prédiction de la sortie de ce modèle s'écrit:

$$\hat{y}(k) = q^{-d} B(q^{-1})u(k) \quad (3.97)$$

On calcule ensuite l'erreur de prédiction:

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k) = y(k) - \varphi_f^T(k)\theta \quad (3.98)$$

où

$$\varphi_f^T(k) = [u(k-d), u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)] \quad (3.99)$$

$$\theta^T = [b_0, b_1, \dots, b_m] \quad (3.100)$$

On observe que le problème de minimisation de l'erreur de prédiction dans ce cas est un problème de régression linéaire par rapport au vecteur de paramètres  $\theta$ . Une estimation de  $\theta$  peut être calculée avec la méthode des moindres carrés (3.41). Pour la structure FIR, les coefficients du polynôme  $B_0$  correspondent à un nombre fini de termes de la réponse impulsionnelle du système. Alors, l'ordre de polynôme  $B(q^{-1})$  doit être choisi tel que  $(m+d)T$  soit plus grand ou égal au temps d'établissement de la réponse impulsionnelle du système. L'erreur d'estimation des paramètres est calculée tel que présenté à la sous-section 3.4.3:

$$\hat{\theta} - \theta_0 = \left[ \sum_{k=1}^N \varphi_f(k) \varphi_f^T(k) \right]^{-1} \left[ \sum_{k=1}^N \varphi_f(k) n(k) \right] \quad (3.101)$$

L'estimation des paramètres est donc non biaisée car  $n(k)$  n'est pas corrélé avec le régresseur  $\varphi_f(k)$  qui ne contient que le signal d'entrée.

### 3.5.2 Structures avec modèle du bruit

On peut démontrer que si le spectre du bruit est strictement positif dans toutes les fréquences entre 0 et  $\pi$  ( $\phi_{nn}(\omega) > 0, \forall \omega \in [0, \pi]$ ), le bruit  $n(k)$  peut toujours être modélisé par un bruit blanc à moyenne nulle  $e(k)$  filtré par une fonction de transfert stable est inversement stable:

$$n(k) = H_0(q^{-1})e(k) = \frac{C_0(q^{-1})}{D_0(q^{-1})}e(k) \quad (3.102)$$

où  $C_0$  et  $D_0$  sont des polynômes moniques (le premier coefficient est 1) avec toutes les racines à l'intérieur du cercle unité. En introduisant le modèle du bruit dans l'équation (3.85), on obtient une classe de structures plus large pour le vrai système:

$$y(k) = G_0(q^{-1})u(k) + H_0(q^{-1})e(k) \quad (3.103)$$

Comme le bruit à l'instant  $k$  est un bruit blanc filtré, il dépend aussi des valeurs passées de  $e$  (donc disponibles) à l'instant  $k-1$ . Pour trouver les éléments prévisibles du bruit, il est exprimé comme suit:

$$\begin{aligned} n(k) &= H_0(q^{-1})e(k) = [H_0(q^{-1}) - 1]e(k) + e(k) \\ &= \left[ \frac{C_0(q^{-1}) - D_0(q^{-1})}{D_0(q^{-1})} \right] e(k) + e(k) \end{aligned} \quad (3.104)$$

On observe que  $n(k)$  contient deux termes:  $\left[ \frac{C_0(q^{-1}) - D_0(q^{-1})}{D_0(q^{-1})} \right] e(k)$  et  $e(k)$ . Le deuxième terme  $e(k)$  est toute à fait imprévisible à l'instant  $k-1$ , tandis que le premier terme est prévisible si  $H_0(q^{-1})$  est connu. Ceci peut être expliqué en développant la différence de  $C_0(q^{-1})$  et  $D_0(q^{-1})$  qui sont des polynômes moniques:

$$C_0(q^{-1}) - D_0(q^{-1}) = (c_1^0 - d_1^0)q^{-1} + (c_2^0 - d_2^0)q^{-2} + \dots \quad (3.105)$$

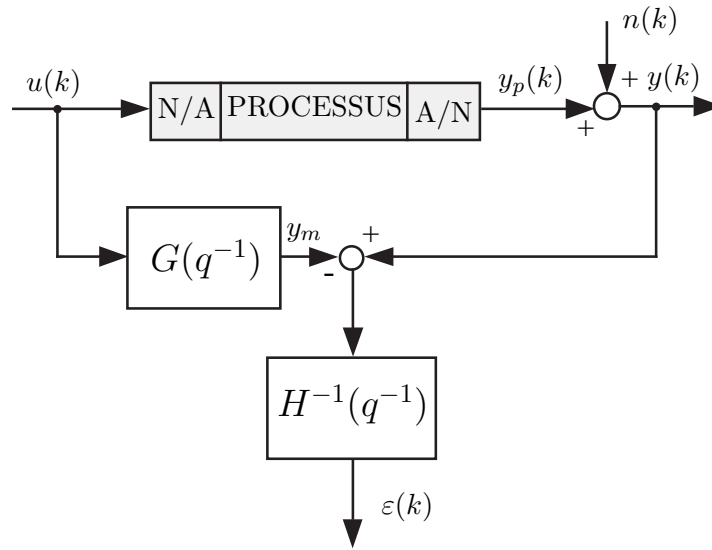


FIG. 3.11 – Schéma de l'erreur de prédiction explicitant les modèles du processus et du bruit

On s'aperçoit que le premier terme de  $n(k)$  à l'équation (3.104) ne dépend que des valeurs de  $e(k-1)$ ,  $e(k-2)$ , ... et est donc accessible à l'instant  $k-1$ . Ceci nous permet de définir le meilleur prédicteur de la sortie pour la structure générale (3.103) comme suit:

$$\hat{y}(k, \theta_0) = G_0(q^{-1})u(k) + [H_0(q^{-1}) - 1]e(k) \quad (3.106)$$

où  $\theta_0$  contient les paramètres du modèle du processus  $G_0(q^{-1})$  et du modèle du bruit  $H_0(q^{-1})$ . Avec ce prédicteur idéal, l'erreur de prédiction sera égale au bruit blanc  $e(k)$  et donc également blanche:

$$\varepsilon(k, \theta_0) = y(k) - \hat{y}(k, \theta_0) = e(k) \quad (3.107)$$

Malheureusement, le vecteur de paramètres  $\theta_0$  est inconnu et les valeurs  $e(k-1)$ ,  $e(k-2)$ , ... ne sont pas mesurables. On se contente donc de définir un prédicteur paramétrisé où  $\theta_0$  est remplacé par  $\theta$  et  $e(k-1)$ ,  $e(k-2)$ , ... sont estimés par  $\varepsilon(k-1)$ ,  $\varepsilon(k-2)$ , ...:

$$\hat{y}(k, \theta) = G(q^{-1})u(k) + [H(q^{-1}) - 1]\varepsilon(k, \theta) \quad (3.108)$$

L'erreur de prédiction dans ce cas s'écrit:

$$\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k, \theta) = y(k) - G(q^{-1})u(k) - [H(q^{-1}) - 1]\varepsilon(k, \theta) \quad (3.109)$$

ce qui donne:

$$\varepsilon(k, \theta) = H^{-1}(q^{-1})[y(k) - G(q^{-1})u(k)] \quad (3.110)$$

La figure 3.11 montre le schéma de calcul de l'erreur de prédiction explicitant les modèles du processus et du bruit. En remplaçant  $y(k)$  de l'équation (3.103) dans

l'équation (3.110), on obtient:

$$\begin{aligned}\varepsilon(k, \theta) &= H^{-1}(q^{-1})[G_0(q^{-1})u(k) + H_0(q^{-1})e(k) - G(q^{-1})u(k)] \\ &= H^{-1}(q^{-1}) \{ [G_0(q^{-1}) - G(q^{-1})] u(k) + [H_0(q^{-1}) - H(q^{-1})] e(k) \} + e(k)\end{aligned}\quad (3.111)$$

Ainsi, si  $G_0$  et  $H_0$  appartiennent à l'ensemble des modèles  $G$  et  $H$ , pour  $\theta = \theta_0$  on aura  $G = G_0$  et  $H = H_0$  et ainsi  $\varepsilon(k, \theta) = e(k)$  et donc une erreur de prédiction blanche. Intuitivement, ce résultat important peut s'expliquer comme suit. L'erreur de prédiction représente le désaccord entre la mesure  $y(k)$  et la prédiction  $\hat{y}(k, \theta)$  du modèle complet (modèles du processus et du bruit). Un bon modèle sera capable d'expliquer à la fois la composante déterministe de la sortie  $y(k)$  qui résulte de l'entrée  $u(k)$  ainsi que la composante qui provient du bruit, lequel peut être généré à partir d'un bruit blanc (hypothèse de départ). Ainsi, la séquence d'erreurs de prédiction (appelée **résidus**) ne sera pas corrélée avec l'entrée si le modèle du processus est correct. De plus, elle sera blanche de par l'équation (3.111) si les modèles du processus et du bruit sont corrects.

Pour simplifier la notation l'argument  $\theta$  dans le modèle, le prédicteur de la sortie et l'erreur de prédiction sont omis par la suite. Mais il faut toujours se rappeler que  $\hat{y}(k)$  et  $\varepsilon(k)$  sont des fonctions de  $\theta$ .

Avec différentes hypothèses sur le modèle du bruit, différentes structures peuvent être définies. Nous présentons maintenant la prédiction de la sortie pour certains cas spéciaux.

### 3.5.2.1 Structure ARX

Cette structure modélise le bruit  $n(k)$  par un bruit blanc filtré à l'aide du dénominateur du modèle du processus (fig. 3.12):

$$y(k) = \frac{q^{-d_0} B_0(q^{-1})}{A_0(q^{-1})} u(k) + \frac{1}{A_0(q^{-1})} e(k) \quad (3.112)$$

Cette hypothèse est très contraignante mais, comme on le verra par la suite, a l'avantage que le prédicteur basé sur cette structure est linéaire par rapport aux vecteur de paramètres du modèle à identifier. Ceci nous permet de résoudre le problème de minimisation de l'erreur de prédiction de façon analytique et trouver le minimum global.

Cette structure est connue sous la dénomination ARX, où AR fait référence au terme auto-regressif  $A_0(q^{-1})y(k)$  (quand on multiplie les deux cotés de l'équation (3.112) par  $A_0(q^{-1})$ ) et X à l'entrée externe  $u(k)$ .

Le prédicteur de la sortie pour le modèle ARX s'obtient en remplaçant  $H(q^{-1})$  par  $\frac{1}{A(q^{-1})}$  dans l'équation (3.108):

$$\hat{y}(k) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \left[ \frac{1}{A(q^{-1})} - 1 \right] \varepsilon(k) \quad (3.113)$$

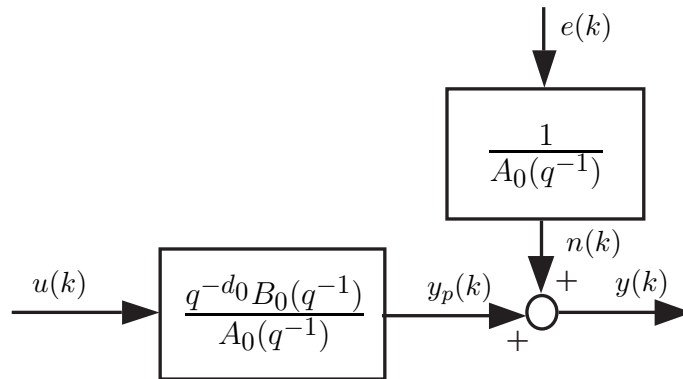


FIG. 3.12 – Structure ARX

L'erreur de prédiction est obtenu aussi en remplaçant  $H(q^{-1})$  par  $\frac{1}{A(q^{-1})}$  dans l'équation (3.110):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(k) &= A(q^{-1})\left[y(k) - \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k)\right] \\
 &= A(q^{-1})y(k) - B(q^{-1})u(k-d) \\
 &= y(k) - a_1y(k-1) - \dots - a_ny(k-n) + b_0u(k-d) + \dots + b_mu(k-d-m) \\
 &= y(k) - \varphi^T(k)\theta
 \end{aligned}$$

On observe que l'équation de l'erreur de prédiction pour le modèle ARX et la même que l'erreur d'équation (3.23). Ceci nous permet d'utiliser l'algorithme des moindres carrés pour la minimisation du critère quadratique basé sur l'erreur de prédiction. L'estimation du vecteur de paramètres sera non biaisé si le bruit sur la sortie est un bruit blanc filtré par le dénominateur du modèle du processus.

### 3.5.2.2 Structure ARMAX

Pour cette structure, la sortie mesurée s'écrit (fig. 3.13):

$$y(k) = \frac{q^{-d_0} B_0(q^{-1})}{A_0(q^{-1})}u(k) + \frac{C_0(q^{-1})}{A_0(q^{-1})}e(k) \quad (3.114)$$

Cette structure, qui considère un terme de moyenne glissante (moving average) pour le bruit  $C_0(q^{-1})e(k)$  (quand on multiplie les deux cotés de l'équation par  $A_0(q^{-1})$ ) en plus du terme auto-régressif, est très utilisée pour l'identification de systèmes dynamiques dans le domaine de l'automatique. On remarque la flexibilité accrue par rapport au modèle ARX pour représenter le bruit et on s'attend à ce que la modélisation du bruit influencera moins celle du processus. Malheureusement, on verra par la suite que le prédictor basé sur cette structure est non linéaire par rapport au vecteur des paramètres à identifier.

Comme les deux fonctions de transfert de la figure 3.13 possèdent le même dénominateur, ce modèle est utile lorsque le bruit agit en amont du processus.

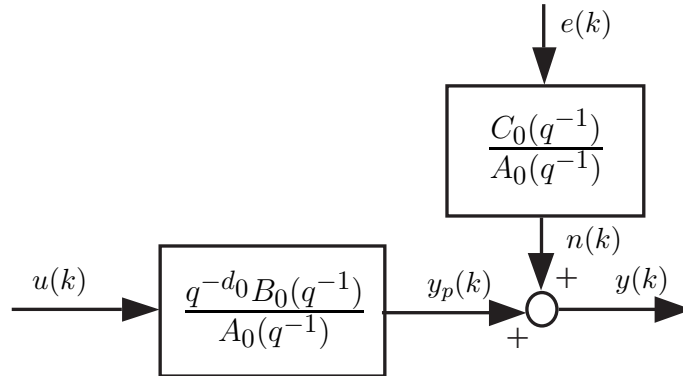


FIG. 3.13 – Structure ARMAX

En remplaçant  $H(q^{-1})$  par  $\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}$  dans l'équation (3.108) on obtient la prédiction de la sortie pour le modèle ARMAX:

$$\hat{y}(k) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \left[ \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} - 1 \right] \varepsilon(k) \quad (3.115)$$

L'erreur de prédiction pour le modèle ARMAX s'écrit donc:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) &= \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[ y(k) - \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) \right] \\ &= \frac{1}{C(q^{-1})} [A(q^{-1})y(k) - B(q^{-1})u(k-d)] \end{aligned} \quad (3.116)$$

L'erreur de prédiction est non linéaire par rapport au paramètres du modèle du processus et du bruit. L'erreur de prédiction sera blanche si la structure du vrai modèle est ARMAX et appartient à l'ensemble des modèles candidats ( $d = d_0$  et les ordres de  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont respectivement les mêmes que ceux de  $A_0$ ,  $B_0$  et  $C_0$ ).

### 3.5.2.3 Structure Box-Jenkins

La structure proposée par Box et Jenkins 3.14 est plus générale car les modèles du processus et du bruit n'ont pas de facteurs communs. Ainsi, on a plus de degré de liberté pour modéliser le bruit mais également plus de paramètres à identifier. La sortie mesurée est représentée par:

$$y(k) = \frac{q^{-d_0} B_0(q^{-1})}{A_0(q^{-1})} u(k) + \frac{C_0(q^{-1})}{D_0(q^{-1})} e(k) \quad (3.117)$$

Cette structure conduit aussi à un prédicteur non linéaire par rapport au vecteur de paramètres:

$$\hat{y}(k) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \left[ \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} - 1 \right] \varepsilon(k) \quad (3.118)$$



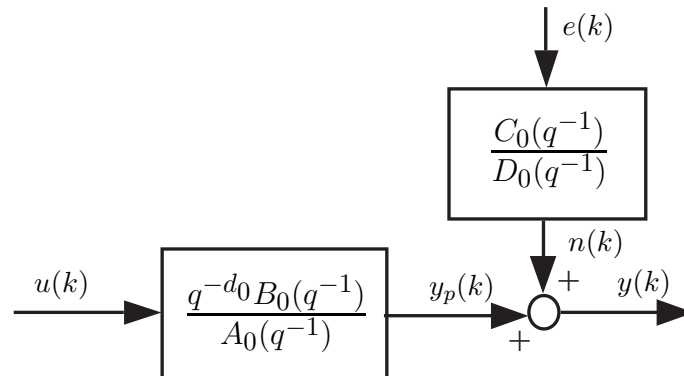


FIG. 3.14 – Structure Box-Jenkins

L'erreur de prédiction pour le modèle BJ s'écrit à partir de l'équation (3.110) en remplaçant  $H(q^{-1})$  par  $\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}$ :

$$\varepsilon(k) = \frac{D(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[ y(k) - \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) \right] \quad (3.119)$$

### 3.5.3 Minimisation de l'erreur de prédiction

On a vu que les paramètres d'un modèle sont identifiés en minimisant un critère quadratique basé sur l'erreur de prédiction définie comme:

$$J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - \hat{y}(k)]^2 \quad (3.120)$$

Pour les structures FIR et ARX, l'erreur de prédiction est linéaire par rapport au vecteur de paramètres à identifier et donc le minimum du critère (3.84) peut être calculé avec la méthode des moindres carrés présentée à la section 3.4. Les autres structures résultent en un problème d'optimisation non linéaire pour laquelle on utilise le plus souvent l'algorithme itératif de Gauss-Newton. Une autre approche est de résoudre ce problème de manière itérative en résolvant à chaque itération un problème de régression linéaire d'où le nom de **régression pseudo-linéaire**. Il convient de noter qu'un problème d'optimisation non linéaire possède en général plusieurs solutions avec la possibilité d'optima locaux. Nous allons étudier ces deux approches par la suite.

#### 3.5.3.1 Régression pseudo-linéaire

Considérons le prédicteur de l'erreur de sortie donné à l'équation (3.91). En multipliant les deux cotés de cette équation par  $A(q^{-1})$  on obtient:

$$A(q^{-1})\hat{y}(k) = B(q^{-1})u(k-d) \quad (3.121)$$

Cette équation peut être représentée sous forme vectorielle comme suit:

$$\begin{aligned}\hat{y}(k) &= -a_1\hat{y}(k-1), \dots, -a_n\hat{y}(k-n) + b_0u(k-d) + \dots + b_mu(k-d-m) \\ &= \varphi_e^T(k)\theta\end{aligned}\quad (3.122)$$

où

$$\varphi_e^T(k) = [-\hat{y}(k-1), \dots, -\hat{y}(k-n), u(k-d), \dots, u(k-d-m)] \quad (3.123)$$

$$\theta^T = [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m] \quad (3.124)$$

L'erreur de prédiction  $\varepsilon(k) = y(k) - \varphi_e^T(k)\theta$  a la forme d'une régression linéaire mais en réalité c'est un problème de régression non linéaire car le régresseur  $\varphi_e(k)$  contient la sortie estimée  $\hat{y}$  qui est une fonction de  $\theta$ . Ce problème peut être résolu avec une méthode itérative avec l'algorithme suivant:

$$\hat{\theta}_{i+1} = \left[ \sum_{k=1}^N \varphi_e(k, \hat{\theta}_i) \varphi_e^T(k, \hat{\theta}_i) \right]^{-1} \left[ \sum_{k=1}^N \varphi_e(k, \hat{\theta}_i) y(k) \right] \quad (3.125)$$

Cette approche connue sous le nom de l'algorithme de substitution est l'algorithme le plus simple pour résoudre les problèmes d'optimisation non linéaire. Une initialisation de l'algorithme avec la méthode des moindres carrés est indispensable.

Cet algorithme peut également être appliqué aux structures avec un modèle du bruit. A titre d'exemple, considérons la structure ARMAX avec l'erreur de prédiction présentée à l'équation (3.116). En multipliant les deux cotés de cette équation par  $C(q^{-1})$ , l'erreur de prédiction peut être reformulée sous forme d'une régression pseudo-linéaire comme suit:

$$\begin{aligned}\varepsilon(k) &= y(k) - [-a_1y(k-1) - \dots - a_ny(k-n) + b_0u(k-d) + \dots + b_mu(k-d-m) \\ &\quad + c_1\varepsilon(k-1) + \dots + c_p\varepsilon(k-p)] = y(k) - \varphi_x^T(k)\theta\end{aligned}\quad (3.126)$$

où  $p$  est l'ordre du polynôme  $C(q^{-1})$  et

$$\begin{aligned}\varphi_x^T(k) &= [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d), \dots, u(k-d-m), \\ &\quad \varepsilon(k-1), \dots, \varepsilon(k-p)]\end{aligned}\quad (3.127)$$

$$\theta^T = [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m, c_1, \dots, c_p] \quad (3.128)$$

Une estimation de  $\theta$  s'obtient en remplaçant  $\varphi_e(k, \hat{\theta}_i)$  par  $\varphi_x(k, \hat{\theta}_i)$  dans l'équation (3.125).

*Reformuler l'erreur de prédiction de la structure Box-Jenkins sous forme d'une régression pseudo-linéaire.*

### 3.5.3.2 Algorithme de Gauss-Newton

La méthode de régression pseudo-linéaire est très simple à mettre en œuvre mais la convergence de l'algorithme ne peut pas être démontrée. En pratique, on préfère

utiliser l'algorithme de Gauss-Newton. Dans cet algorithme, le vecteur de paramètres à l'itération  $i + 1$  est estimé avec la relation suivante:

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i - [J''(\hat{\theta}_i)]^{-1} J'(\hat{\theta}_i) \quad (3.129)$$

où  $J'(\hat{\theta}_i)$  est le gradient et  $J''(\hat{\theta}_i)$  le Hessien du critère (3.120) évalué à  $\hat{\theta}_i$ . L'algorithme est initialisé par les paramètres identifiés avec la méthode des moindres carrés (ARX) pour le modèle du processus. Les paramètres du modèle du bruit sont souvent initialisés à zéro. Le gradient et le Hessien se calculent aisément pour chaque structure.

Le gradient de  $J(\theta)$  par rapport à  $\theta$  s'écrit:

$$J'(\theta) = \frac{\partial J}{\partial \theta} = \frac{-2}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{y}}{\partial \theta} \varepsilon(k) = \frac{-2}{N} \sum_{k=1}^N \psi(k) \varepsilon(k) \quad (3.130)$$

où  $\psi(k)$  est le gradient du prédicteur:

$$\psi(k) \equiv \frac{\partial \hat{y}}{\partial \theta} \quad (3.131)$$

Le Hessien du critère est calculé comme suit:

$$J''(\theta) = \frac{\partial^2 J}{\partial \theta \partial \theta^T} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \left[ \psi(k) \psi^T(k) - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \varepsilon(k) \right] \approx \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \psi(k) \psi^T(k) \quad (3.132)$$

Le deuxième terme de Hessien est ignoré car il est très petit par rapport au premier terme au voisinage de la solution ( $\varepsilon(k)$  s'approche du bruit blanc  $e(k)$  dont la somme sur  $N$  données converge vers zéro quand  $N$  tend vers l'infini). Pour implanter l'algorithme de Gauss-Newton on a besoin de calculer le gradient de la prédiction de la sortie  $\psi(k)$ .

A titre d'exemple, on calcule  $\psi(k)$  pour la structure de l'erreur de sortie avec le prédicteur suivant:

$$\hat{y}(k) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) = \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}} u(k-d) \quad (3.133)$$

On calcule la dérivée de  $\hat{y}(k)$  pour les paramètres du numérateur et du dénominateur séparément:

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial b_i} = \frac{q^{-i}}{A(q^{-1})} u(k-d) = \frac{1}{A(q^{-1})} u(k-d-i) \quad i = 0, \dots, m \quad (3.134)$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial a_i} = \frac{-q^{-i} B(q^{-1})}{A^2(q^{-1})} u(k-d) = \frac{-1}{A(q^{-1})} \hat{y}(k-i) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.135)$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned} \psi^T(k) &= \frac{1}{A(q^{-1})} [-\hat{y}(k-1), \dots, -\hat{y}(k-n), u(k-d), \dots, u(k-d-m)] \\ &= \frac{1}{A(q^{-1})} \varphi_e^T(k) \end{aligned} \quad (3.136)$$

On peut résumer l'algorithme de Gauss-Newton pour identifier les paramètres de la structure de l'erreur de sortie comme suit:

1. Choisir l'ordre du système à identifier  $(d, n, m)$  et le critère d'arrêt  $\epsilon > 0$ .
2. Initialiser le vecteur de paramètres avec la méthode des moindres carrés ( $i = 1$ ):  
 $\hat{\theta}_1 = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi Y$ .
3. Calculer  $\hat{y}(k, \hat{\theta}_i) = G(q^{-1}, \hat{\theta}_i)u(k)$  pour  $k = 1, \dots, N$
4. Calculer l'erreur de prédiction  $\varepsilon(k, \hat{\theta}_i) = y(k) - \hat{y}(k, \hat{\theta}_i)$  pour  $k = 1, \dots, N$ .
5. Calculer le vecteur  $\psi^T(k, \hat{\theta}_i) = \frac{1}{A(q^{-1}, \hat{\theta}_i)} \varphi_e^T(k, \hat{\theta}_i)$  pour  $k = 1, \dots, N$  avec

$$\varphi_e^T(k, \hat{\theta}_i) = [-\hat{y}(k-1, \hat{\theta}_i), \dots, -\hat{y}(k-n, \hat{\theta}_i), u(k-d), \dots, u(k-m)]$$

6. Calculer le gradient du critère  $J'(\hat{\theta}_i) = \frac{-2}{N} \sum_{k=1}^N \psi(k, \hat{\theta}_i) \varepsilon(k, \hat{\theta}_i)$
7. Calculer le Hessien du critère  $J''(\hat{\theta}_i) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \psi(k, \hat{\theta}_i) \psi^T(k, \hat{\theta}_i)$
8. Calculer  $\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i - [J''(\hat{\theta}_i)]^{-1} J'(\hat{\theta}_i)$
9. Si  $(\hat{\theta}_{i+1} - \hat{\theta}_i)^T (\hat{\theta}_{i+1} - \hat{\theta}_i) < \epsilon$ , arrêter l'algorithme avec  $\hat{\theta} = \hat{\theta}_{i+1}$  sinon  $i = i + 1$  et retourner à 3.

Cet algorithme utilisé aussi dans MATLAB converge normalement après moins d'une dizaine d'itérations.

Montrer que pour la structure ARMAX le vecteur  $\psi(k) = \frac{1}{C(q^{-1})} \varphi_x(k)$  avec  $\varphi_x(k)$  défini à l'équation (3.127).

**Remarque:** Rappelons que la sortie mesurée d'un système est une variable aléatoire à cause de l'influence du bruit sur la sortie. De même, l'erreur de prédiction  $\varepsilon(k)$  et le vecteur de paramètres estimés  $\hat{\theta}$  sont aussi des variables aléatoires dans le sens qu'avec l'acquisition d'une nouvelle donnée on a une réalisation du bruit et donc également une réalisation du vecteur  $\hat{\theta}$ . La covariance du vecteur de paramètres estimés dépendra de la variance du bruit sur la sortie  $\sigma_0^2$ . La covariance des paramètres est déterminée à l'aide de la relation suivante (quand  $N$  est suffisamment grand):

$$\text{cov}(\hat{\theta}) = E\{(\hat{\theta} - \theta_0)(\hat{\theta} - \theta_0)^T\} = \frac{\sigma_0^2}{N} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi(k) \psi^T(k) \right]^{-1} \quad (3.137)$$

### 3.5.4 Analyse fréquentielle de l'erreur de prédiction

Aux sections précédentes, on a toujours supposé que le modèle du processus et le modèle identifié ont la même structure et les mêmes ordres. En pratique, dans la plus part des cas, le modèle identifié a une complexité inférieure au modèle réel et l'objectif est d'obtenir une bonne approximation du vrai modèle dans une certaine

bande de fréquences. C'est la raison pour laquelle une interprétation fréquentielle du critère quadratique de l'erreur de prédiction est très intéressante.

Pour obtenir une interprétation fréquentielle du critère (3.84), on peut utiliser le théorème de Parseval qui démontre l'égalité de l'énergie (ou de la puissance moyenne) d'un signal (aléatoire ou déterministe) dans les domaines temporel et fréquentiel. Ce théorème est asymptotique et donc valable lorsque le nombre de données tend vers l'infini. Pour l'erreur de prédiction, on a:

$$E\{\varepsilon^2(k)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) d\omega \quad (3.138)$$

Pour déterminer la densité spectrale de l'erreur de prédiction, on utilise la relation entre les densités spectrales des signaux entrée-sortie d'un modèle. Pour un modèle  $G(q^{-1})$  avec l'entrée  $u(k)$  et sortie  $y(k)$ , en utilisant les relations suivantes:

$$\phi_{uy}(\omega) = G(e^{j\omega})\phi_{uu}(\omega), \quad \phi_{yy}(\omega) = G(e^{j\omega})\phi_{yu}(\omega), \quad \phi_{uy}(\omega) = \phi_{yu}(-\omega)$$

on démontre facilement:

$$\phi_{yy}(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2 \phi_{uu}(\omega) \quad (3.139)$$

Considérons maintenant l'erreur de prédiction pour la structure de l'erreur de sortie:

$$\varepsilon(k) = [G_0(q^{-1}) - G(q^{-1})]u(k) + n(k) \quad (3.140)$$

En utilisant la relation (3.139) et le fait que  $n(k)$  est  $u(k)$  ne sont pas corrélés, on obtient:

$$\phi_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = |G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega})|^2 \phi_{uu}(\omega) + \phi_{nn}(\omega) \quad (3.141)$$

Le vecteur des paramètres estimés s'écrit:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [|G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega})|^2 \phi_{uu}(\omega) + \phi_{nn}(\omega)] d\omega \quad (3.142)$$

Cette expression montre clairement que:

- Le minimum du critère s'obtient pour  $\hat{\theta} = \theta_0$  (l'estimation est non biaisée).
- Dans le cas d'une différence d'ordre entre  $G(q^{-1})$  et  $G_0(q^{-1})$ , une bonne approximation de  $G_0(e^{j\omega})$  s'obtient aux fréquences où  $\phi_{uu}(\omega)$  a des valeurs importantes.
- Pour obtenir une pondération fréquentielle sur l'erreur du modèle  $G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega})$ , il suffit de filtrer l'entrée et la sortie du système par un filtre  $F(q^{-1})$  avant d'appliquer le procédure d'optimisation. Dans ce cas, le vecteur des paramètres estimés s'écrit:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 [|G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega})|^2 \phi_{uu}(\omega) + \phi_{nn}(\omega)] d\omega \quad (3.143)$$

Considérons maintenant l'erreur de prédiction pour les structures avec un modèle du bruit:

$$\varepsilon(k) = H^{-1}(q^{-1}) \{ [G_0(q^{-1}) - G(q^{-1})] u(k) + [H_0(q^{-1}) - H(q^{-1})] e(k) \} + e(k) \quad (3.144)$$

De façon similaire, en appliquant le théorème de Parseval, on obtient:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H^{-1}(e^{j\omega})|^2 [|G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega})|^2 \phi_{uu}(\omega) + |H_0(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 \phi_{ee}(\omega)] d\omega \quad (3.145)$$

Cette expression nous permet de conclure que:

- Si  $G_0$  et  $H_0$  ont la même structure et les mêmes ordres que  $G$  et  $H$ , une estimation non biaisée s'obtient ( $\hat{\theta} = \theta_0$ ).
- Si  $G_0$  et  $G$  ont des ordres différents, l'erreur du modèle est faible aux fréquences où  $\phi_{uu}(\omega)$  et  $|H^{-1}(e^{j\omega})|$  ont des valeurs importantes. On voit donc que le rôle du modèle du bruit est celui de filtrer les données expérimentales pour retomber sur le cas du critère basé sur la structure de l'erreur de sortie avec filtrage de données. Il faut remarquer que le modèle de bruit permet de blanchir l'erreur de prédiction et d'obtenir une meilleure prédiction de la sortie, mais en revanche il donne une pondération fréquentielle souvent indésirable pour l'erreur du modèle. A titre d'exemple, la structure ARX donne une meilleure estimation du modèle du processus à hautes fréquences car  $H^{-1}(q^{-1}) = A(q^{-1})$  est un filtre passe-haut. Les modèles ( $G$  et  $H$ ) ainsi obtenus donnent de bonnes caractéristiques pour la *prédiction* de la sortie mais sont moins efficaces par rapport au modèle identifié par la structure de l'erreur de sortie pour la *simulation*. MATLAB propose une option avec "focus on simulation" pour avoir un bon modèle de simulation et un modèle du bruit en même temps. Pour cela, un modèle avec la structure de l'erreur de sortie est tout d'abord identifié, ensuite on fixe ce modèle et on identifie le modèle du bruit avec une deuxième identification en utilisant la structure ARMA.
- Si  $G_0$  et  $G$  ont les mêmes ordres mais  $H_0$  et  $H$  ont une structure différente, une estimation non biaisée des paramètres de  $G_0$  est possible s'il n'y a pas de facteurs communs entre  $G$  et  $H$  (la structure BJ). Dans les structures ARX et ARMAX le biais du modèle du bruit rend également l'estimation des paramètres du modèle du processus biaisée à cause de l'existence du facteur commun  $A(q^{-1})$  dans le modèle du bruit et du processus.
- Si  $G_0$  et  $H_0$  n'ont pas les mêmes ordres que  $G$  et  $H$ , le modèle du processus est toujours mieux identifié que celui du bruit car le spectre du signal d'entrée  $\phi_{uu}(\omega)$  est, en pratique, plus important que le spectre du bruit  $\phi_{ee}(\omega)$ .

### 3.6 IDENTIFICATION EN BOUCLE FERMÉE

Les algorithmes d'identification présentés ci-dessus considèrent le système en boucle ouverte, c'est-à-dire sans retour d'information de la sortie vers l'entrée. Or,

pour des raisons de stabilité ou de performance, il n'est souvent pas possible d'ouvrir la boucle du système commandé. D'autre part, dans le cas d'une commande adaptative indirecte, la synthèse du régulateur est basée sur un modèle du processus identifié en boucle fermée. Il est donc utile d'étudier la performance des algorithmes d'identification paramétrique dans un contexte boucle fermée. On verra qu'il est nécessaire de distinguer deux approches: sans et avec excitation externe additionnelle.

### 3.6.1 Identification sans excitation externe

Soit le problème de régulation donné à la figure 3.15 ( $y_c(k) = 0, n(k) \neq 0, \forall k$ ). Comme il n'y a pas d'excitation externe additionnelle, le bruit  $n$  représente la seule excitation de ce système. Le problème principal est que la matrice d'information peut devenir singulière si le régulateur n'est pas suffisamment complexe. Considérons par exemple un régulateur proportionnel  $G_R(q^{-1}) = K_p$  et une structure ARX du premier ordre comme suit:

$$(1 + a_1 q^{-1})y(k) = b_1 q^{-1}u(k) + e(k) \quad (3.146)$$

La sortie prédite est donnée par:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k) &= -a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) + e(k) \\ &= [-y(k-1) \quad u(k-1)] \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + e(k) = \varphi^T(k)\theta + e(k) \end{aligned} \quad (3.147)$$

et la grandeur  $u(k)$  par:

$$u(k) = -K_p y(k) \quad (3.148)$$

La matrice d'information s'écrit:

$$\begin{aligned} \Phi^T \Phi &= \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} y^2(k-1) & -y(k-1)u(k-1) \\ -u(k-1)y(k-1) & u^2(k-1) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} y^2(k-1) & K_p y^2(k-1) \\ K_p y^2(k-1) & K_p^2 y^2(k-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.149)$$

Il est évident que la matrice d'information n'est pas de rang plein et est singulière, donc les paramètres du modèle ne sont pas *identifiables*. On peut démontrer qu'une condition suffisante d'identifiabilité est que l'ordre du régulateur soit plus grand ou égale à l'ordre du modèle. Si un modèle n'est pas identifiable en boucle fermée avec un régulateur simple (par exemple un PID) on peut changer les paramètres du PID au cours de l'acquisition des données pour rendre régulière la matrice d'information.

### 3.6.2 Identification avec excitation externe

Le système bouclé est excité par l'intermédiaire de la consigne  $y_c(k)$  (fig. 3.15). Le même effet peut également être obtenu à partir d'une excitation du signal de commande  $u(k)$ : l'excitation externe est alors ajoutée à la sortie du régulateur.

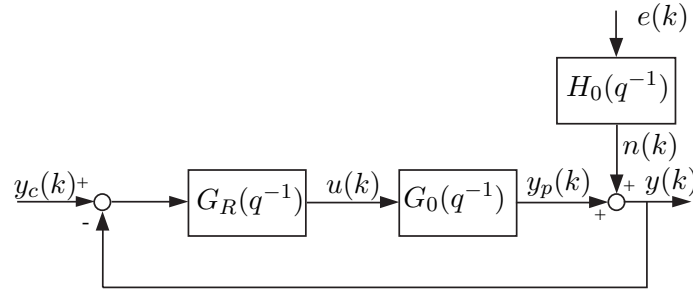


FIG. 3.15 – Schéma d'identification en boucle fermée avec l'excitation externe  $y_c(k)$ .

Dans la pratique, on préfère varier  $y_c(k)$  plutôt que l'entrée du procédé car cette variation a un effet plus prévisible sur la grandeur commandée  $y(k)$ . En effet, le gain statique du système n'étant pas connu avant le résultat de l'identification, la variation choisie pour l'entrée du procédé peut s'avérer trop faible (à peine mesurable en  $y(k)$ ) ou trop forte (perturbation inacceptable de la production).

Il est possible d'identifier  $G_0$  en boucle fermée de façon directe ou indirecte.

### 3.6.2.1 Méthode directe

Avec cette méthode, on excite le système avec un signal d'excitation externe  $y_c(k)$  et on mesure les signaux  $u(k)$  et  $y(k)$ . Parmi les méthodes d'identification en boucle ouverte, seule les structures avec la modélisation du bruit sont applicables. En fait, l'hypothèse de base pour les structures OE et FIR n'est plus satisfaite en boucle fermée à cause de la corrélation entre le bruit et le signal d'entrée. Mais, même en boucle fermée, le bruit sur la sortie peut être représenté comme un bruit blanc filtré (figure 3.15).

Cependant, l'identification en boucle fermée s'avère plus difficile pour la raison suivante: En boucle ouverte, il est suffisant que  $G_0$  et  $G$  ont les mêmes ordres pour obtenir une estimation non biaisée des paramètres du modèle du processus sous la condition d'utilisation du modèle BJ (cf. § 3.5.4). Donc, même si le modèle du bruit  $H_0(q^{-1})$  n'appartient pas à l'ensemble des modèles  $H(q^{-1})$  (ce qui est souvent le cas) on peut obtenir un bon modèle pour le processus. Mais en boucle fermée, à cause de l'effet du bruit sur l'entrée du processus, une bonne estimation du modèle du bruit est *nécessaire* pour obtenir une estimation non biaisée du modèle du processus.

D'autre part, la méthode des variables instrumentales (cf. section 3.4.4) est bien appropriée pour l'identification en boucle fermée avec schéma direct car l'excitation externe (indépendante du bruit) peut être utilisée comme variable instrumentale. Un autre choix plus judicieux est d'identifier deux modèles auxiliaires pour générer  $y_M(k)$  et  $u_M(k)$  et de construire le vecteur des variables instrumentales suivant:

$$\varphi_{IV}^T(k) = [-y_M(k-1) \dots -y_M(k-n) \ u_M(k-d-1) \dots u_M(k-d-m)] \quad (3.150)$$

Dans cette méthode, le modèle de la boucle fermée entre le signal d'excitation  $y_c(k)$  et la sortie  $y(k)$  est tout d'abord identifié (avec une identification de type boucle



ouverte).  $y_M(k)$  est la sortie simulée de ce modèle dont l'entrée est  $y_c(k)$ . Ensuite, un autre modèle de la boucle fermée entre  $y_c(k)$  et l'entrée du processus  $u(k)$  est identifié. La sortie de ce modèle à l'entrée  $y_c(k)$  nous donne le signal  $u_M(k)$ . Ainsi, le vecteur des variables instrumentales n'est pas corrélé avec le bruit mais fortement corrélé avec le régresseur.

### 3.6.2.2 Méthode indirecte

On identifie la fonction de transfert en boucle fermée liant  $y_c(k)$  à  $y(k)$  comme illustré à la figure 3.15. Avec l'hypothèse que le régulateur est connu, on en déduit la fonction de transfert du processus. On a donc:

$$G_{BF}(q^{-1}) = \frac{y(k)}{y_c(k)} = \frac{G_R(q^{-1})G_0(q^{-1})}{1 + G_R(q^{-1})G_0(q^{-1})} \quad (3.151)$$

et

$$G_P(q^{-1}) = \frac{G_{BF}(q^{-1})}{G_R(q^{-1})[1 - G_{BF}(q^{-1})]} \quad (3.152)$$

Cette approche ramène donc le problème de l'identification de  $G_0(q^{-1})$  en boucle fermée à celui de l'identification de  $G_{BF}(q^{-1})$  en «boucle ouverte». Cependant, le modèle  $G_{BF}(q^{-1})$  est généralement d'ordre plus élevé que  $G_0(q^{-1})$ , ce qui nuit à la convergence des paramètres. D'autre part, le calcul de  $G_0(q^{-1})$  à partir de  $G_{BF}(q^{-1})$  peut poser certaines difficultés numériques liées en particulier à une annulation pôles/zéros.

## 3.7 ASPECTS PRATIQUES DE L'IDENTIFICATION

Le succès de l'identification dépend dans une large mesure de l'opportunité de certains choix a priori. Comme cela a été mentionné précédemment, les éléments suivants jouent un rôle primordial dans l'identification d'un système dynamique:

- le choix de la période d'échantillonnage et du signal d'excitation (amplitude et contenu fréquentiel),
- le choix du modèle pour le processus et pour le bruit (nombre de pôles et de zéros, retard pur), ainsi que
- le choix de l'algorithme d'identification (par exemple, méthode des variables instrumentales, méthode des moindres carrés batch ou récurrents, pondérés ou non, valeur du facteur d'oubli  $\lambda$ , valeurs initiales  $\hat{\theta}_0$  et  $P_0$ ).

Cette section sera consacrée à certains aspects pratiques liés au conditionnement des signaux de mesure et au choix de la période d'échantillonnage et du signal d'excitation.

### 3.7.1 Conditionnement des signaux

Il est surprenant de constater avec l'expérience la diversité des artefacts que peut ramasser un essai industriel réel (Richalet, 1991):

- défaut d'instrumentation: capteur bloqué, dérive du transducteur, etc.
- défaut d'acquisition: parasite aléatoire sur la chaîne de traitement (isolement défectueux, etc.),
- défaut de codage (très fréquent): un bit du convertisseur saute aléatoirement pendant un ou plusieurs échantillons (très pernicieux si cela affecte une entrée),
- défaut de stockage: écrasement partiel du fichier de données,
- défaut d'actionneur: point dur aléatoire d'une vanne, saturation liée à un mauvais calibrage de l'essai, etc.
- incident sur le processus: perturbation à basse fréquence de petite amplitude mais très autoritaire; modification inconnue de l'environnement, etc.
- action intempestive des opérateurs mal informés ou peu coopératifs, etc.

La liste ne sera jamais close. Une inspection attentive de bon sens permet d'éliminer les artefacts les plus grossiers. Il ne faut pas hésiter à éliminer les parties douteuses d'un essai et ne garder que ce qui est interprétable. Quelle que soit la qualité des traitements ultérieurs, aucun algorithme ne crée d'information («garbage in  $\rightarrow$  garbage out»).

#### 3.7.1.1 Mise à l'échelle des entrées et sorties

Le vecteur d'observations  $\varphi(k)$  contient aussi bien des entrées  $u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)$  que des sorties  $y(k-1), \dots, y(k-n)$ . Si les valeurs numériques des entrées sont très différentes de celles des sorties, la matrice de covariance  $P$  (ou le Hessien dans la méthode de Gauss-Newton) sera mal équilibrée numériquement, conduisant à des vitesses de convergence différentes pour les paramètres  $a_i$  et  $b_j$ . Il convient donc de mettre à l'échelle les entrées et les sorties. Comme cela modifiera le gain statique identifié, il faudra ensuite diviser ou multiplier les valeurs des paramètres estimés par le facteur de mise à l'échelle correspondant.

#### 3.7.1.2 Détection de points aberrants

Certains points de mesure, carrément faux, doivent être éliminés afin de ne pas trop influencer les résultats de l'identification.

Cela peut se faire en représentant graphiquement les valeurs mesurées et en éliminant (ou corrigeant) les valeurs aberrantes. On peut également détecter ces valeurs aberrantes en visualisant l'erreur de prédiction (qui sera relativement très grande pour les points de mesure aberrants).

### 3.7.1.3 Elimination des perturbations basses fréquences

Les données expérimentales contiennent souvent des perturbations basses fréquences telles que décalages, tendances, dérives, variations périodiques. Il existe deux approches pour éliminer ces perturbations:

- les éliminer par un prétraitement des données,
- mettre au point un modèle du bruit capable de les absorber.

Nous ne considérerons ici que la première approche, la deuxième ayant déjà été présentée à la section 3.5.

Le modèle linéaire du processus ne considère que les *variations* autour d'un point de fonctionnement. Il convient donc d'exprimer ces variations en éliminant la contribution (le plus souvent constante) du point de fonctionnement dans les signaux.

Plusieurs méthodes existent pour cela:

- a) Si le point de fonctionnement  $(\bar{u}, \bar{y})$  est connu, on peut éliminer la composante constante en choisissant l'entrée et la sortie du modèle comme des déviations autour du point de fonctionnement:

$$u(k) = u_e(k) - \bar{u} \quad (3.153)$$

$$y(k) = y_e(k) - \bar{y} \quad (3.154)$$

où  $u_e(k)$  et  $y_e(k)$  indiquent les valeurs expérimentales mesurées, exprimées en unités physiques (souvent arbitraires). Les signaux  $u(k)$  et  $y(k)$  représentent ainsi des **variables écart**.

- b) Si le point de fonctionnement n'est pas connu, on peut l'estimer à l'aide des valeurs moyennes suivantes:

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_e(k) \quad (3.155)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_e(k) \quad (3.156)$$

Pour une identification en temps réel, on utilise la version récurrente des équations précédentes:

$$\bar{u} = \bar{u}(k-1) + \frac{1}{k} [u_e(k) - \bar{u}(k-1)] \quad (3.157)$$

$$\bar{y} = \bar{y}(k-1) + \frac{1}{k} [y_e(k) - \bar{y}(k-1)] \quad (3.158)$$

Il est également possible d'éliminer l'influence du point de fonctionnement en travaillant avec la dérivée des signaux expérimentaux. Concrètement, on peut filtrer les données expérimentales à l'aide du filtre  $L(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$ , ce qui donne:

$$u(k) = L(q^{-1})u_e(k) = u_e(k) - u_e(k-1) \quad (3.159)$$

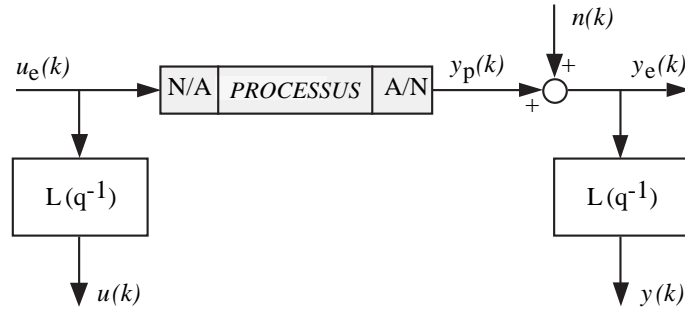
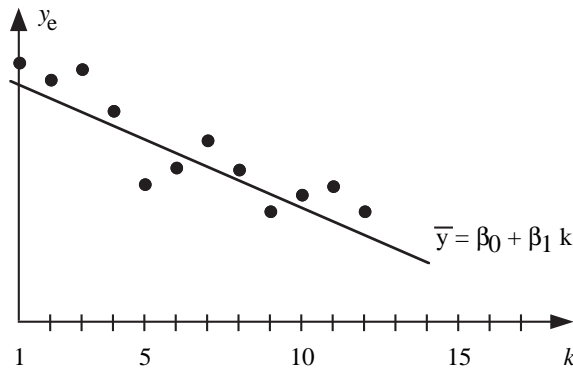


FIG. 3.16 – Filtrage parallèle des signaux expérimentaux d'entrée et de sortie.

FIG. 3.17 – Ligne de base  $\bar{y}$  avec dérive.

$$y(k) = L(q^{-1})y_e(k) = y_e(k) - y_e(k-1) \quad (3.160)$$

Ce sont ces signaux filtrés  $u(k)$  et  $y(k)$  (fig. 3.16) qui seront utilisés pour identifier un modèle dynamique du processus.

- c) Si la ligne de base des signaux mesurés n'est pas constante, mais correspond à une dérive lente, on estimera ce point de fonctionnement variable, par exemple à l'aide d'une régression linéaire (fig. 3.17):

$$\bar{y} = \beta_0 + \beta_1 k \quad (3.161)$$

On peut également le faire en temps réel en introduisant un oubli exponentiel avec un facteur  $\lambda < 1$ :

$$\bar{y}(k) = \lambda \bar{y}(k-1) + (1-\lambda)y_e(k) \quad (3.162)$$

- d) De façon générale, on peut utiliser un filtre passe-haut pour réduire l'influence des perturbations basses fréquences. Afin d'identifier le bon modèle, il convient de filtrer de manière identique les signaux d'entrée et de sortie comme illustré à la figure 3.16.

On peut utiliser le filtre passe-haut du premier ordre  $L(q^{-1}) = \frac{1-q^{-1}}{1-\alpha q^{-1}}$ :

$$u(k) = \alpha u(k-1) + u_e(k) - u_e(k-1) \quad (3.163)$$

$$y(k) = \alpha y(k-1) + y_e(k) - y_e(k-1) \quad (3.164)$$

avec

$$\alpha = e^{-T/\tau_f}$$

où  $\tau_f$  représente la constante de temps du filtre. Il faut veiller à choisir cette dernière de manière à ne pas éliminer les basses fréquences du signal d'excitation. Par exemple, si le système est excité par un signal binaire pseudo-aléatoire de période  $\theta = (2^n - 1)T$ , on choisira une pulsation de coupure du filtre inférieure à la pulsation  $\omega_0 (= 2\pi/\theta)$  du signal pseudoaléatoire:

$$\omega_f = \frac{1}{\tau_f} < \omega_0 = \frac{2\pi}{(2^n - 1)T} \quad (3.165)$$

c'est-à-dire:

$$\tau_f > \frac{(2^n - 1)T}{2\pi} \quad (3.166)$$

#### 3.7.1.4 Elimination des perturbations hautes fréquences

Afin d'éviter un recouvrement (ou repliement) de spectre du signal échantillonné, le contenu spectral du signal analogique doit se limiter à l'intervalle  $[0, \omega_N]$  avec  $\omega_N = \omega_s/2 = \pi/T$ . Comme cela ne sera pas le cas dans la pratique puisque tout signal limité dans le temps possède un spectre de fréquences illimité (cf. mise à l'échelle temporelle et fréquentielle du tableau A.2 ou encore la figure A.4 dans l'annexe A, il convient de préfiltrer le signal analogique avec un *filtre analogique* passe-bas (appelé **filtre de garde** ou filtre d'anti-repliement) de façon à réduire fortement son spectre pour  $\omega > \omega_N$ .

Si les entrées et sorties échantillonnées sont corrompues par des bruits dont le spectre est au-delà de celui des signaux utiles, il convient de les filtrer avec un *filtre numérique* passe-bas, par exemple celui du premier ordre  $L(q^{-1}) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha q^{-1}}$ :

$$u(k) = \alpha u(k-1) + (1 - \alpha)u_e(k) \quad (3.167)$$

$$y(k) = \alpha y(k-1) + (1 - \alpha)y_e(k) \quad (3.168)$$

avec

$$\alpha = e^{-T/\tau_f}$$

où  $\tau_f$  représente la constante de temps du filtre ( $\omega_f = 1/\tau_f$  sa pulsation de coupure).

De manière générale, il est souvent utile de filtrer les données expérimentales avec un **filtre passe-bande** (filtre passe-bas combiné avec un filtre passe-haut) afin de réduire l'effet des perturbations basses et hautes fréquences et accentuer ainsi le domaine de fréquences (2-3 décades) autour de la bande passante du système à identifier.

### 3.7.2 Choix de la période d'échantillonnage

La période d'échantillonnage  $T$  doit être choisie avec soin avant le début de l'expérience, car elle ne peut plus être réduite une fois les échantillons mémorisés. Par contre, la période d'échantillonnage peut aisément être doublée, triplée, etc. en laissant simplement tomber une partie des données (décimation).

Une borne supérieure pour  $T$  est donnée par la condition d'échantillonnage de Shannon ( $\omega_N > \omega_{\max}$ , c'est-à-dire  $T < \pi/\omega_{\max}$ , où  $\omega_N$  représente la pulsation de Nyquist et  $\omega_{\max}$  la plus grande pulsation contenue dans les signaux d'entrée et de sortie). En pratique, il est recommandé d'utiliser un filtre de garde afin de réduire le contenu fréquentiel à hautes fréquences et ainsi les effets de recouvrement de spectre.

Notons que ces problèmes de recouvrement de spectre sont également actuels lorsqu'un signal échantillonné est décimé. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, le filtre de garde peut être de nature numérique.

La valeur de  $T$  dépendra principalement de:

- la constante de temps dominante de l'application finale,
- la précision souhaitée (à basses et hautes fréquences) du modèle identifié,
- difficultés numériques qui peuvent résulter si  $T$  est trop petite.

Ces points sont explicités ci-dessous.

- a) Plusieurs facteurs influencent le choix de la période d'échantillonnage pour la *commande numérique*: la performance du système bouclé, le type d'algorithme de commande, le spectre des perturbations, les organes de mesure et de commande, la charge de calcul pour le microprocesseur, etc. On choisit souvent la période d'échantillonnage  $T$  dans l'intervalle suivant:

$$\frac{\tau_{BF}}{6} < T < \frac{\tau_{BF}}{2} \quad (3.169)$$

où  $\tau_{BF}$  représente la constante de temps dominante du système bouclé (ou  $\omega_{BF} = 1/\tau_{BF}$  sa bande passante). Il faut mentionner que la bande passante de la boucle fermée est choisie normalement égale ou légèrement supérieure à la bande passante du système en boucle ouverte  $\omega_{BO}$ . Une estimation de la constante de temps dominante du système en boucle ouverte  $\tau_{BO} = 1/\omega_{BO}$  peut être obtenue à partir de la réponse indicielle du système (temps d'établissement  $\approx 4\tau_{BO}$ ).

La relation (3.169) peut également s'écrire dans le domaine fréquentiel par rapport à la pulsation de Nyquist  $\omega_N$ :

$$2\pi\omega_{BF} < \omega_N < 6\pi\omega_{BF} \quad (3.170)$$

- b) Si le but de l'identification se limite à la *simulation*, on aura tendance à choisir une période d'échantillonnage plus petite de façon à augmenter l'information sur le système à hautes fréquences. On choisira en pratique:

$$\frac{\tau_{BO}}{30} < T < \frac{\tau_{BO}}{10} \quad (3.171)$$

Ce choix, qui correspond à

$$10\pi\omega_{BO} < \omega_N < 30\pi\omega_{BO} \quad (3.172)$$

permet de bien modéliser le système dans la décade au-dessus de la bande passante. Si la période d'échantillonnage est petite, on court souvent le danger, avec une excitation binaire pseudo-aléatoire, de sous-exciter le système à basses fréquences. Pour éviter cela, il faudra veiller à choisir le coup d'horloge  $T_a$  du signal d'excitation aléatoire comme un multiple de la période d'échantillonnage (cf. § 3.7.3.3):

$$T_a = pT \quad (3.173)$$

- c) Un échantillonnage très rapide conduit souvent à des difficultés numériques (système d'équations mal conditionné) parce que les équations aux différences associées à des instants voisins deviennent approximativement linéairement dépendantes.

D'autre part, les pôles des fonctions de transfert discrètes vont tendre vers 1 en perdant leur sensibilité par rapport au phénomène physique. Considérons à titre d'exemple un système du premier ordre avec une constante de temps  $\tau = 50s$  échantillonné avec  $T = 0.1s$ . Le pôle discret vaut  $\exp(-0.1/50) = 0.9980$ . Si  $\tau$  augmente de 50%, le pôle devient  $\exp(-0.1/75) = 0.9987$ , soit une variation inférieure à 1%!

De plus, le modèle sera ajusté surtout dans les hautes fréquences au détriment des basses fréquences. Ceci est dû au fait que l'identification minimise l'erreur de prédiction à l'instant suivant. Plus  $T$  est petit, plus cet instant sera proche et plus les caractéristiques hautes fréquences seront accentuées. Et finalement, il en résultera beaucoup de calculs pour un modèle souvent pas très bon.

En conclusion, on propose de choisir  $T$  selon l'équation (3.169) pour une application de commande et l'équation (3.171) pour une étude limitée à l'identification du système.

### 3.7.3 Choix du signal d'excitation

#### 3.7.3.1 Contenu fréquentiel

Le processus à identifier est excité à l'aide du signal d'entrée  $u(k)$ . Il est important de choisir une entrée qui excite tous les modes du système, et donc toutes les fréquences correspondantes.

Par exemple, un signal d'entrée sinusoïdal de pulsation  $\omega_0$  ne donnera de l'information qu'à cette pulsation  $\omega_0$ . Il existe une infinité de systèmes qui généreront la même sortie pour cette entrée particulière. Il importe donc que  $u(k)$  contiennent suffisamment de fréquences.

Il convient également que cette excitation soit persistante de façon à assurer que la matrice  $\Phi^T\Phi$ , laquelle contient les entrées et les sorties passées, soit régulière (cf. équation 3.38). La qualité de l'identification dépend de la «richesse» de l'excitation.

D'autre part, si l'excitation est insuffisante, la convergence vers zéro de l'erreur de prédiction  $\varepsilon(k)$  n'implique pas nécessairement la convergence des paramètres estimés vers les vrais paramètres du modèle. Considérons à titre d'exemple le système:

$$y(k+1) = -ay(k) + bu(k) \quad (3.174)$$

et le modèle estimé de même structure:

$$\hat{y}(k+1) = -\hat{a}y(k) + \hat{b}u(k) \quad (3.175)$$

ou  $\hat{y}(k+1)$  représente la sortie prédite par le modèle estimé.

Supposons que le système se trouve à l'état stationnaire et que les gains statiques du système et du modèle soient égaux:

$$\frac{\hat{b}}{1+\hat{a}} = \frac{b}{1+a} \quad (3.176)$$

avec  $\hat{a} \neq a$  et  $\hat{b} \neq b$ . Si l'entrée reste constante à la valeur  $\bar{u}$ , les sorties du système et du modèle resteront elles-mêmes constantes aux valeurs suivantes:

$$y(k+1) = y(k) = \frac{b}{1+a}\bar{u} \quad (3.177)$$

$$\hat{y}(k+1) = \hat{y}(k) = \frac{\hat{b}}{1+\hat{a}}\bar{u} \quad (3.178)$$

En raison de la relation (3.176), l'erreur de prédiction sera nulle:

$$\varepsilon(k+1) = y(k+1) - \hat{y}(k+1) = 0 \quad (3.179)$$

sans pour autant que  $\hat{a} = a$  et que  $\hat{b} = b$ . L'application d'une entrée constante ne permet donc pas, dans ce cas, d'identifier correctement les paramètres  $a$  et  $b$ .

On démontre qu'une identification correcte de  $a$  et  $b$  est possible en utilisant l'entrée  $u(k) = \sin(\omega kT)$  avec  $\omega \neq 0$ .

Pour un modèle discret de la forme (3.31) avec  $p$  paramètres à identifier, il est possible de choisir  $u(k)$  comme la somme de  $q$  sinusoïdes de fréquences distinctes:

$$u(k) = \sum_{i=1}^q \sin(\omega_i kT) \quad (3.180)$$

avec

$$\begin{cases} q \geq \frac{p}{2} & \text{si } p \text{ est pair} \\ q \geq \frac{p+1}{2} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour bien identifier les paramètres, il faut donc appliquer une entrée riche en fréquences. En pratique, on utilise souvent des excitations binaires (deux niveaux de signal) avec une durée variable par niveau. Cette durée peut varier linéairement ou être générée de manière pseudo-aléatoire.



### 3.7.3.2 Amplitude

L'amplitude du signal d'excitation représente un compromis entre le rapport signal-sur-bruit et la non-linéarité du système à identifier.

L'amplitude de l'excitation doit rester supérieure au niveau du bruit résiduel. Si le rapport signal-sur-bruit est faible, il faudra allonger la longueur de l'essai afin d'obtenir une bonne estimation des paramètres.

Dans de nombreuses applications, une excitation trop forte du processus n'est pas souhaitable en raison du caractère non linéaire du processus à identifier ou, tout simplement, parce qu'une telle perturbation est inacceptable pour le bon fonctionnement du processus.

### 3.7.3.3 Durée de l'essai

Considérons le cas d'une excitation à l'aide d'un signal binaire pseudo-aléatoire (SBPA, cf. § 2.5).

Notons par  $T_a$  le coup d'horloge du signal d'excitation ( $T_a$  est un multiple de la période d'échantillonnage):

$$T_a = pT \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (3.181)$$

Il convient de dimensionner correctement le signal d'excitation. Par exemple, afin de mieux identifier le gain statique du système avec un SBPA, on propose que la durée de l'impulsion la plus longue soit supérieure au temps d'établissement du processus (fig. 3.18). On obtient ainsi:

$$nT_a > 4\tau \quad (3.182)$$

avec  $n$  la longueur du registre à décalage,  $n > 5$  pour que  $R_{uu}(h)$  puisse être assimilée à une impulsion unité (cf. § 2.5).

D'autre part, pour balayer tout le spectre des fréquences disponibles, il faut une longueur d'essai  $L$  au moins égale à une période complète de l'excitation:

$$L > (2^n - 1)T_a \quad (3.183)$$

Les relations (3.182) et (3.183) fixent une borne inférieure pour  $n$  et  $L$ . Par exemple pour  $\tau/T = 10$ , on obtient:

$$n > \max(5, 40/p)$$

$$L > (2^n - 1)pT$$

Afin d'éviter des longueurs d'essai prohibitives tout en garantissant une bonne identification des basses fréquences, on choisit souvent  $p = 2, 3$  ou même 8. Pour l'exemple précité, on obtient:

$$\begin{array}{ll} \text{pour } p = 1 & n = 40 \quad L > (2^{40} - 1)T \\ \text{pour } p = 8 & n = 5 \quad L > (2^5 - 1)8T \end{array}$$

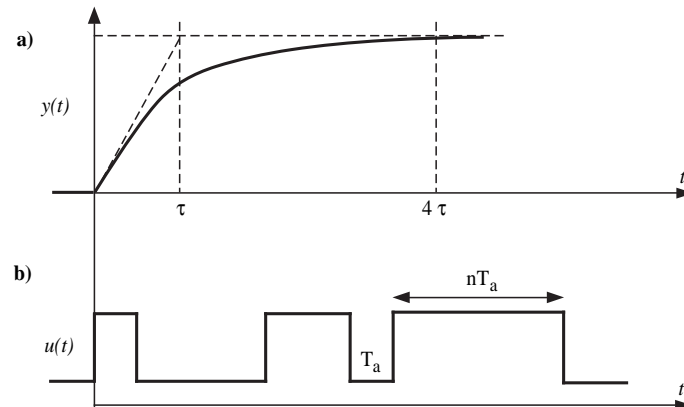


FIG. 3.18 – (a) Réponse indicielle d'un système avec son temps d'établissement (environ  $4\tau$ ); (b) Impulsion la plus longue ( $nT_a$ ) d'un SBPA.

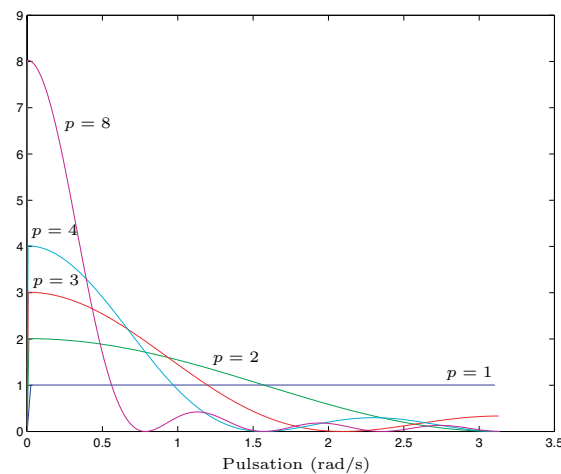


FIG. 3.19 – Les spectres d'un SBPA avec différentes valeurs de  $p$ .

ce qui représente une réduction de la durée d'essai de l'ordre de  $2^{32}$ . Cependant, il importe de noter que pour  $p > 1$  le SBPA n'a plus la caractéristique fréquentielle d'un bruit blanc. En effet, en augmentant la richesse de SBPA à basses fréquences on identifie mieux à basses fréquences mais on perd la précision à hautes fréquences. Ceci est démontré par les spectres d'un SBPA avec différentes valeurs de  $p$  à la figure 3.19. En pratique, on choisit d'abord  $p = 1$  et on compare la réponse fréquentielle du modèle paramétrique avec celle d'un modèle non paramétrique trouvé par l'analyse spectrale. Si la différence est important dans les basses fréquences on peut augmenter  $p$  toute en vérifiant l'erreur dans les hautes fréquences.

### 3.7.4 Estimation de l'ordre

Un des objectifs de l'identification est d'obtenir le modèle le plus simple qui vérifie les critères de validation. Une première approche pour estimer l'ordre du sys-

tème, c'est-à-dire les valeurs  $m, n$  et  $d$  qui sont respectivement l'ordre du polynôme  $B(q^{-1}), A(q^{-1})$  et le retard, est d'étudier les représentations non paramétriques du système. On a vu à la section 2.2 qu'une estimation grossière du retard et de l'ordre du dénominateur peut être obtenue de la réponse indicielle ou impulsionnelle. La pente de la réponse fréquentielle du système aussi peut nous donner des indices sur l'ordre du système (cf. section 2.4).

### 3.7.4.1 Méthodes paramétriques pour estimation de l'ordre

Les méthodes d'identification paramétrique peuvent aussi être utilisées pour estimer l'ordre d'un système. Considérons qu'on fixe le retard  $d = 1$  et qu'on trace l'évolution du critère d'identification  $J$  pour la structure ARX en fonction de la valeur de  $n = m$  pour  $n = 0, \dots, n_{\max}$  où  $n_{\max}$  est l'ordre maximum qu'on considère pour le système. Autrement dit, pour chaque valeur de  $n$ , on lance l'algorithme d'identification avec la structure ARX et on calcule les résidus en fonction de  $n$  comme suit:

$$J(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \hat{\theta}) \quad (3.184)$$

En théorie, s'il s'agit d'un exemple simulé et non bruité, une courbe présentant un coude net suivi d'un segment horizontal sera obtenue qui indique que l'accroissement du nombre de paramètres n'améliore pas le critère. En pratique, comme l'ordre des systèmes réels est infini et les données sont bruitées, ce coude n'est pas franc. Cependant, on peut s'apercevoir qu'à partir d'un certain ordre l'amélioration du critère n'est plus significative et donc qu'il n'est pas raisonnable d'augmenter plus l'ordre du modèle. Pour avoir un critère quantitatif on peut rajouter un terme qui pénalise la complexité du modèle au critère d'identification  $J(n)$  comme suit (figure 3.20):

$$C_g(n) = J(n) + S(n, N) \quad (3.185)$$

où  $C_g(n)$  est le critère global et  $S(n, N)$  est le terme de pénalité qui typiquement augmente linéairement avec  $n$  et décroît en fonction du nombre de données  $N$ . Le minimum du critère globale nous donne l'ordre estimé  $\hat{n}$  du système. Les termes de pénalité proposés dans la littérature donnent asymptotiquement une estimation non biaisé de  $\hat{n}$  mais en pratique, pour un nombre fini de données, l'ordre du système est surestimé par ces méthodes.

Pour les structures avec un modèle du bruit, en règle générale et en absence d'informations *a priori*, on choisi comme ordre du modèle du bruit la valeur de  $n$ .

### 3.7.4.2 Simplification de pôles et de zéros

Si l'ordre du modèle est surestimé, on peut le réduire sans trop influencer le comportement entrée-sortie du système. Dans ce cas, une simplification approximative de pôles et de zéros devient possible. Cela peut être vérifié avec la structure

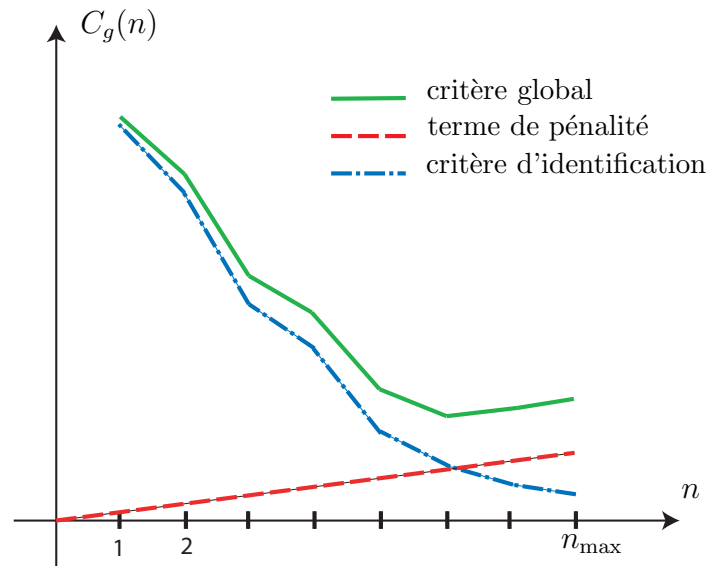


FIG. 3.20 – L'évolution du critère d'identification ( $-\cdot-$ ), terme de pénalité ( $--$ ) et critère global ( $-$ ) en fonction de  $n$

ARMAX présentée ci-dessous:

$$A_0(q^{-1})y(k) = q^{-d_0}B_0(q^{-1})u(k) + C_0(q^{-1})e(k) \quad (3.186)$$

Il est évident que si  $A(q^{-1}) = A_0(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1}) = B_0(q^{-1})$  et  $C(q^{-1}) = C_0(q^{-1})$  est un bon modèle pour le système, alors  $A(q^{-1})M(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})M(q^{-1})$  et  $C(q^{-1})M(q^{-1})$  peuvent également exprimer le comportement du système. Donc, pour estimer l'ordre d'un modèle, on peut varier  $m = n$  de 1 à  $n_{\max}$  et trouver l'ordre  $\hat{n}$  à partir duquel une simplification de pôles et de zéros se produit.

### 3.7.4.3 Estimation du retard

A partir de la réponse indicielle d'un système, en mesurant le temps entre l'application d'échelon et la réaction du système, on peut estimer approximativement le retard  $d$  du modèle. Si l'on n'a pas de connaissance sur le retard, on choisit une valeur initiale:  $d = 1$  pour considérer le retard dû à l'échantillonnage. Si le retard a été sous-estimé lors de l'identification, les premiers coefficients de  $B(q^{-1})$  vont être très petits. On peut donc identifier avec la structure FIR la réponse impulsionnelle du système pour  $m$  suffisamment grand. Le nombre des premiers coefficients de  $B(q^{-1})$  qui sont autour de zéro (en considérant l'écart type du coefficient estimé) représente le retard du système.

MATLAB propose un algorithme dans lequel le critère d'identification pour la structure ARX  $J(m, n, d)$  est déterminé pour toutes les combinaisons possibles de  $m \in [m_{\min}, m_{\max}]$ ,  $n \in [n_{\min}, n_{\max}]$  et  $d \in [d_{\min}, d_{\max}]$ . Ensuite, l'évolution du critère en fonction du nombre de paramètres ( $m + n + 1$ ) est tracée (pour chaque  $m + n + 1 = \text{cte.}$ , le minimum du critère pour différentes valeurs de  $m$  et  $n$  est retenu).

Plusieurs termes de pénalité sont proposés et chacun conduit à des valeurs optimales pour  $m$ ,  $n$  et  $d$ . Cependant, une vérification de l'ordre avec d'autres méthodes est indispensable.

Il faut noter que le modèle identifié avec les ordres estimés ne vérifie pas nécessairement les critères de validation expliqués à la section suivante. Si l'essai de toutes les méthodes ne permet pas d'obtenir un modèle *valide*, alors une solution est d'augmenter  $n$  et  $m$ .

## 3.8 VALIDATION DU MODÈLE

La procédure d'identification des paramètres choisit le «meilleur» modèle compte tenu des données disponibles, de la structure de modèle proposée, du critère de performance et de l'algorithme d'identification utilisés. Ce «meilleur» modèle est-il suffisamment bon? De manière plus spécifique:

- est-il suffisamment en accord avec les données expérimentales?
- est-il suffisant pour le but escompté?
- décrit-il le «vrai» système?

Si la troisième question est intéressante, c'est la deuxième qui est la plus importante en pratique, car un modèle doit toujours être développé avec un but précis. Plusieurs approches de validation d'un modèle identifié sont présentées ci-dessous.

### 3.8.1 Validation par rapport au but escompté

Cette méthode consiste à essayer et... voir si le but escompté peut être atteint avec le modèle identifié. Si cela est le cas, on pourra considérer le modèle comme «bon», indépendamment d'aspects plus formels liés à son élaboration. Il peut cependant s'avérer impossible, trop coûteux ou dangereux de valider un modèle de cette façon.

### 3.8.2 Validation du modèle avec des données expérimentales

#### 3.8.2.1 Comparaison de la sortie du modèle avec des données nouvelles

Cette méthode consiste à utiliser, pour l'étape de validation, des données non utilisées lors de l'établissement du modèle. Il s'agit de comparer la sortie du modèle et la sortie mesurée en terme d'un critère quadratique. L'inconvénient d'une telle démarche réside dans le fait que toutes les données à disposition ne sont pas utilisées pour l'élaboration du modèle.

#### 3.8.2.2 Comparaison de la sortie du modèle avec des données déjà utilisées

Cette méthode constitue une solution au problème précédent, la validation se faisant avec des mesures déjà utilisées pour identifier les paramètres du modèle.

Une telle démarche est cependant dangereuse. En effet, dans la pratique on connaît rarement le nombre de paramètres (nombre de pôles et de zéros) à identifier. Or, il est évident que l'erreur quadratique moyenne peut être réduite en augmentant le nombre de paramètres, c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté à disposition pour la minimisation du critère quadratique. Ceci n'augmente en général pas la valeur prévisionnelle du modèle (bien au contraire) puisque les degrés de liberté supplémentaires dans le modèle du processus sont utilisés pour représenter le bruit! La valeur prévisionnelle d'un modèle doit se mesurer à l'aide d'une comparaison avec des données nouvelles.

Cependant, il est possible d'utiliser certains tests statistiques pour valider successivement la contribution de termes additionnels (ceci dépasse le cadre de ce cours).

### 3.8.2.3 Comparaison du modèle dans le diagramme de Bode

Cette méthode est très utile, car les éléments à comparer ne possèdent pas nécessairement les mêmes hypothèses de départ: le modèle identifié est de type paramétrique, donc avec un choix préalable de structure, d'ordre, etc., le relevé dans le diagramme de Bode constitue une approche non paramétrique sans aucun choix structurel a priori.

## 3.8.3 Validation par des méthodes statistiques

### 3.8.3.1 Test de blancheur de l'erreur de prédiction

Si les modèles du processus et du bruit sont corrects, l'erreur de prédiction tendra *asymptotiquement* vers un bruit blanc dont l'autocorrélation est une impulsion de Dirac. C'est-à-dire:  $R_{\varepsilon\varepsilon}(h) = 0$  pour  $h \neq 0$  et  $R_{\varepsilon\varepsilon}(0) \neq 0$ .

En pratique,  $R_{\varepsilon\varepsilon}(h)$  est estimé avec la relation suivante:

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(h) = \frac{1}{N-h} \sum_{k=0}^{N-h-1} \varepsilon(k)\varepsilon(k+h) \quad h = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.187)$$

Donc,  $R_{\varepsilon\varepsilon}(h)$  sera différent de zéro pour  $h \geq 1$  car un nombre fini de mesures est disponible et, d'autre part,  $\varepsilon(k)$  contient des erreurs résiduelles de structure (erreurs sur l'ordre, effets non linéaires, etc.). On considère alors comme critère pratique de validation (avec un seuil de confiance de 95%):

$$\left| \frac{R_{\varepsilon\varepsilon}(h)}{R_{\varepsilon\varepsilon}(0)} \right| \leq \frac{1.96}{\sqrt{N}} \quad \text{pour } 1 \leq h < 20, N > 100 \quad (3.188)$$

Ce critère est basé sur le théorème de la limite centrale. Selon ce théorème si l'erreur de prédiction est blanche, alors  $\sqrt{N} \frac{R_{\varepsilon\varepsilon}(h)}{R_{\varepsilon\varepsilon}(0)}$  pour  $h \neq 0$  est une variable aléatoire à moyenne nulle, variance unité et distribution gaussienne. Ceci nous permet de calculer l'intervalle de confiance de 95%.

Il faut préciser que *si l'erreur de prédiction est blanche, il y a 95% de chance que le critère soit satisfait*. Mais cela ne veut pas dire que *si l'erreur de prédiction est dans l'intervalle de confiance, il y a 95% de chance qu'elle soit blanche*.

Un critère de validation aisément satisfait indiquera que des simplifications du modèle sont possibles. A complexité de modèle égale, on choisira le modèle qui minimisera le critère ci-dessus.

Notons enfin que *ce test de blancheur de l'erreur de prédiction n'est valable que si un modèle du bruit est estimé*. Dans le cas contraire (structures FIR, OE) les résidus seront, en général, autocorrélés.

### 3.8.3.2 Test d'indépendance entre les entrées passées et l'erreur de prédiction

Si le modèle du processus est correct, l'erreur de prédiction sera indépendante des entrées passées, car l'effet de ces entrées sera entièrement expliqué par le modèle et ne se retrouvera donc pas dans l'erreur de prédiction.

Ce test est moins sévère que le précédent, car il ne présuppose pas un modèle du bruit correct. Il est, par contre, également valable pour les structures sans modèle du bruit (FIR, OE). Dans la pratique, il suffit d'exiger que le modèle du processus, et non le modèle complet (processus et bruit), soit correct. Il est cependant parfois difficile d'obtenir un bon modèle du processus sans avoir un bon modèle du bruit! Expériences montrent qu'il y a plus de chance de tomber sur un minimum local dans la structure OE que la structure ARMAX, par exemple.

Si  $u(k)$  et  $\varepsilon(k)$  sont indépendants, leur intercorrélacion sera nulle, c'est-à-dire  $E\{u(k)\varepsilon(k+h)\} = 0, \forall h$ . Comme en pratique

$$R_{u\varepsilon}(h) = \frac{1}{N-h} \sum_{k=0}^{N-h-1} u(k)\varepsilon(k+h) \quad h = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.189)$$

sera différent de zéro, on considère comme critère pratique de validation (avec un seuil de confiance de 95%):

$$\left| \frac{R_{u\varepsilon}(h)}{\sqrt{R_{\varepsilon\varepsilon}(0)R_{uu}(0)}} \right| \leq \frac{1.96}{\sqrt{N}} \quad \text{pour } 0 \leq h < 20, N > 100 \quad (3.190)$$

Une corrélation entre  $u(k)$  et  $\varepsilon(k+h)$  pour des valeurs négatives de  $h$  indiquera la présence d'un feedback de la sortie sur l'entrée, et non pas une erreur de modèle.

### 3.8.3.3 Test d'indépendance entre la sortie du modèle et l'erreur de prédiction

En continuation du point précédent, si le modèle du processus est correct, l'erreur de prédiction sera indépendante non seulement des entrées passées mais également des sorties du modèle  $y_m$ .

Si  $y_m(k)$  et  $\varepsilon(k)$  sont indépendants, leur intercorrélacion sera nulle, mais l'estimation non biaisée de la fonction d'intercorrélacion donne:

$$R_{y_m\varepsilon}(h) = \frac{1}{N-h} \sum_{k=0}^{N-h-1} y_m(k)\varepsilon(k+h) \quad h = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.191)$$

avec comme critère pratique de validation (avec un seuil de confiance de 95%):

$$\left| \frac{R_{y_m\varepsilon}(h)}{\sqrt{R_{\varepsilon\varepsilon}(0)R_{y_my_m}(0)}} \right| \leq \frac{1.96}{\sqrt{N}} \quad \text{pour } 0 \leq h < 20, N > 100 \quad (3.192)$$

Ce test est important dans le cadre de la méthode des variables instrumentales car il indique si l'erreur de prédiction est effectivement non corrélée avec une variable instrumentale type, en l'occurrence  $y_m(k)$ . Ce test est générique et reste valable même si les variables instrumentales ont été générées différemment.

### 3.8.3.4 Intervalle de confiance des paramètres estimés

L'identification des paramètres livre en général une indication de la précision des résultats (par exemple, à partir de la covariance des paramètres (3.137)). Il est alors possible de générer, avec un certain degré de probabilité, des intervalles de confiance pour les paramètres identifiés:

$$\hat{\theta} \in [\hat{\theta}_{\min}, \hat{\theta}_{\max}] \quad \text{avec 95\% (ou 99\%) de probabilité} \quad (3.193)$$

Si pour un paramètre donné, cet intervalle inclut la valeur 0, ce paramètre pourra très bien être négligé et, ainsi, la structure du modèle choisie plus simplement.

## 3.8.4 Validation par des méthodes heuristiques

### 3.8.4.1 Validation de certains choix a priori

Le modèle d'un processus autour d'un point de fonctionnement devrait représenter un invariant, c'est-à-dire qu'il devrait être peu sensible à de faibles variations de certains choix tels que la période d'échantillonnage, le dimensionnement de filtres passe-haut et passe-bas pour les mesures, l'amplitude et le contenu fréquentiel de l'excitation, la structure du modèle pour le processus et le bruit, etc. (cf. section 3.7).

Une grande sensibilité à certains de ces choix est souvent une indication que les choix correspondants ne sont pas adéquats.

### 3.8.4.2 Réification

Les paramètres physiques, qui sont soit identifiés directement, soit reconstruits à partir de paramètres estimés, doivent être plausibles. Cette étape, appelée réification,



est très indicative de compensations possibles entre différents termes du modèle (le comportement entrée-sortie est plausible sans que le modèle physique soit correct). Il est également recommandé de calculer la sensibilité du comportement entrée-sortie du modèle par rapport à ces paramètres et de vérifier ainsi leur identifiabilité pratique.

#### 3.8.4.3 Validation de certaines hypothèses

L'identification d'une fonction de transfert pour le processus présuppose, entre autres, que celui-ci soit linéaire et stationnaire. Il est nécessaire de vérifier a posteriori la validité de ces hypothèses.

**Test de linéarité** Il s'agit de répéter l'identification avec des signaux d'amplitudes différentes afin de déterminer le domaine dans lequel un modèle linéaire est applicable.

**Test de stationnarité** On répète l'identification pour des groupes de mesures prises dans des intervalles de temps différents. Si des perturbations basses et/ou hautes fréquences sont perceptibles, elles peuvent en général être éliminées par un filtrage approprié des mesures.

### 3.9 PROCÉDURE D'IDENTIFICATION PARAMÉTRIQUE

Le succès ou non d'une identification va dépendre de l'opportunité de certains choix tels la période d'échantillonnage, le signal d'excitation, le retard, les degrés des différents polynômes pour modéliser le processus et le bruit. Ces choix sont faits sur la base de connaissances a priori ou de tests simples effectués sur le système à identifier, mais ils peuvent bien sûr être modifiés plus tard de façon *itérative* si nécessaire.

Nous présentons ci-dessous une procédure permettant de choisir les paramètres importants du modèle et de mener l'identification. Une règle de base consiste à commencer avec des structures de modèle simples, à valider les modèles obtenus et à augmenter la complexité si nécessaire. La procédure en 4 points est la suivante:

1. Estimer de façon grossière le retard, la constante de temps dominante du système et le niveau de bruit des signaux mesurés. Cette information peut s'obtenir aisément, par exemple à l'aide de la réponse indicielle et/ou d'une analyse de corrélation. Il sera possible d'en déduire une période d'échantillonnage et un signal d'excitation (contenu fréquentiel, amplitude, durée) appropriés.
2. Estimer l'ordre du modèle avec les méthodes paramétriques et la méthode basée sur la simplification de pôles et zéros. Il peut s'avérer utile, par exemple pour des systèmes mécaniques avec résonances, de tester également des ordres relativement élevés.

3. Utiliser les structures ARMAX, OE et BJ avec ces degrés pour les polynômes du modèle du processus.
4. Valider les meilleurs modèles obtenus en comparant leur sortie avec des données nouvelles ainsi qu'à l'aide des tests de blancheur de l'erreur de prédiction et d'indépendance entre les entrées passées et l'erreur de prédiction.

Cette procédure est présentée à la figure 3.21.

### 3.10 EXERCICES RÉSOLUS

#### Exercice 1

**Énoncé:** Soit le système dynamique donné par la fonction de transfert discrète:

$$G(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z - 1}{z^4 + 1.6z^2 - 0.8z}$$

- a) Ce système est-il physiquement réalisable?
- b) Représenter ce système sous la forme d'une équation aux différences.
- c) Exprimer la fonction de transfert sous la forme de puissances négatives de  $z$  en explicitant le retard éventuel.

**Solution:**

- a) Ce système est physiquement réalisable car

$$\text{degré de } A(z) > \text{degré de } B(z)$$

- b) Equation aux différences:

$$y(k+4) + 1.6y(k+2) - 0.8y(k+1) = u(k+3) + 2u(k+2) + u(k+1) - u(k)$$

ou de façon équivalente:

$$y(k) + 1.6y(k-2) - 0.8y(k-3) = u(k-1) + 2u(k-2) + u(k-3) - u(k-4)$$

$$c) G(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z - 1}{z(z^3 + 1.6z - 0.8)} = z^{-1} \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2} - z^{-3}}{1 + 1.6z^{-2} - 0.8z^{-3}} = z^{-1} \frac{B(z)}{A(z)}$$

retard:  $d = 1$

degrés de  $A(z)$  et  $B(z)$ :  $n = m = 3$

#### Exercice 2

**Énoncé:** La réponse indicielle d'un système lscr a donné pour les 3 premiers points d'échantillonnage ( $T = 0.2$ ) les valeurs suivantes:  $y_1 = 0.18$ ;  $y_2 = 0.33$  et  $y_3 = 0.45$ . Le système peut être modélisé par la fonction de transfert du premier ordre:

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

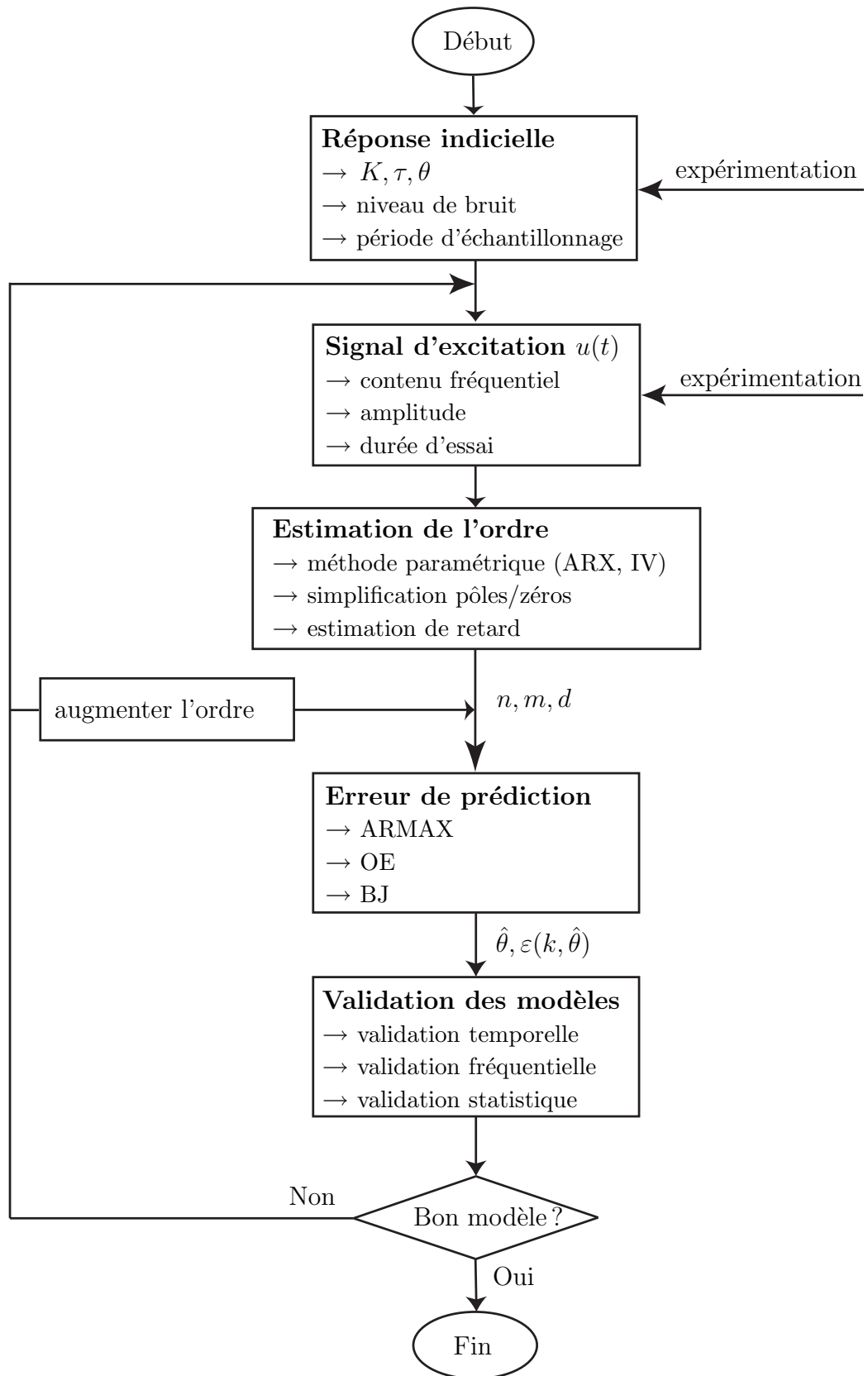


FIG. 3.21 – Procédure d'identification paramétrique.

- a) Expliciter la fonction quadratique relative à la minimisation de l'erreur de sortie.  
 b) Répéter le développement précédent pour l'erreur d'équation.  
 c) Identifier le système dynamique, c'est-à-dire déterminer les valeurs numériques de  $a_1$  et  $b_1$ .  
 d) Identifier le système dynamique en n'utilisant que les deux premières mesures  $y_1$  et  $y_2$ .

**Solution:** Sortie du modèle sur la base des entrées passées uniquement (erreur de sortie):

$$y_m(k) = -a_1 y_m(k-1) + b_1 u(k-1) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.194)$$

Prédiction du modèle sur la base des entrées *et* sorties passées (erreur d'équation):

$$\hat{y}(k) = -a_1 \hat{y}(k-1) + b_1 u(k-1) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.195)$$

*Données numériques pour un saut indiciel:*

$$\begin{aligned} u(0) &= 1, & y(0) &= 0 & \text{condition initiale} \\ u(1) &= 1, & y(1) &= 0.18 \\ u(2) &= 1, & y(2) &= 0.33 \\ u(3) &= 1, & y(3) &= 0.45 \end{aligned}$$

En les substituant dans (3.194) et (3.195):

$$\begin{aligned} y_m(1) &= -a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 = b_1 \\ y_m(2) &= -a_1 \cdot b_1 + b_1 \cdot 1 = b_1(1 - a_1) \\ y_m(3) &= -a_1 \cdot b_1(1 - a_1) + b_1 \cdot 1 = b_1(1 - a_1 + a_1^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}(1) &= -a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 = b_1 \\ \hat{y}(2) &= -a_1 \cdot 0.18 + b_1 \cdot 1 = -0.18a_1 + b_1 \\ \hat{y}(3) &= -a_1 \cdot 0.33 + b_1 \cdot 1 = -0.33a_1 + b_1 \end{aligned}$$

- a) **Critère quadratique pour minimiser l'erreur de sortie (OE):** A partir des équations (3.20) et (3.21):

$$\min_{\theta} J(\theta) = \sum_{k=1}^N e_s^2(k) = \sum_{k=1}^N [y(k) - y_m(k, \theta)]^2$$

Cela donne pour  $N = 3$  et  $\theta = [a_1 \ b_1]^T$ :

$$\min_{\theta} \{ [0.18 - b_1]^2 + [0.33 - b_1(1 - a_1)]^2 + [0.45 - b_1(1 - a_1 + a_1^2)]^2 \} \quad (3.196)$$

L'erreur  $e_s(k)$  est *non linéaire* par rapport aux paramètres  $a_1$  et  $b_1$ .

b) **Critère quadratique pour minimiser l'erreur d'équation (ARX):** A partir des équations (3.24) et (3.26):

$$\min_{\theta} J(\theta) = \sum_{k=1}^N e_e^2(k) = \sum_{k=1}^N [y(k) - \hat{y}(k, \theta)]^2$$

Cela donne pour  $N = 3$  et  $\theta = [a_1 b_1]^T$ :

$$\min_{\theta} \{ [0.18 - b_1]^2 + [0.33 + 0.18a_1 - b_1]^2 + [0.45 + 0.33a_1 - b_1]^2 \} \quad (3.197)$$

L'erreur  $e_e(k)$  est *linéaire* par rapport aux paramètres  $a_1$  et  $b_1$ .

c) **Identification du système:** *Minimisation de l'erreur de sortie*  $\sum_{k=1}^3 e_s^2(k)$   
A partir de (3.196):

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_1} &= 2(0.33 - b_1(1 - a_1))b_1 + 2(0.45 - b_1(1 - a_1 + a_1^2))b_1(1 - 2a_1) \\ &= -6b_1^2 + 1.56b_1 - 1.8a_1b_1 + 4a_1b_1^2 + 6a_1^2 - 4a_1^3b_1^2 = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial b_1} &= 2(0.18 - b_1)(-1) + 2(0.33 - b_1(1 - a_1))(-1 + a_1) \\ &\quad + 2(0.45 - b_1(1 - a_1 + a_1^2))(-1 + a_1 - a_1^2) \\ &= -1.92 - 0.9a_1^2 + 0.66a_1 - 4a_1b_1 + 4a_1^2b_1 + 4a_1^3b_1 - 2a_1^4b_1 + 6b_1 = 0 \end{aligned}$$

Ce système de deux équations algébriques à deux inconnues est de degré 5. Il existe donc plusieurs solutions dont l'une d'entre elles est:

$$a_1 = -0.8191 \quad b_1 = 0.1809$$

On obtient ainsi la fonction de transfert:

$$\hat{G}(z) = \frac{0.1809z^{-1}}{1 - 0.8191z^{-1}}$$

*Minimisation de l'erreur d'équation*  $\sum_{k=1}^3 e_e^2(k)$

A partir de (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_1} &= 2(0.33 + 0.18a_1 - b_1)0.18 + 2(0.45 + 0.33a_1 - b_1)0.33 \\ &= 0.4158 - 1.02b_1 + 0.2826a_1 = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial b_1} &= 2(0.18 - b_1)(-1) + 2(0.33 + 0.18a_1 - b_1)(-1) \\ &\quad + 2(0.45 + 0.33a_1 - b_1)(-1) = -1.92 - 1.02a_1 + 6b_1 = 0 \end{aligned}$$

Ce système de deux équations algébriques à deux inconnues possède une solution unique qui est aisément calculable:

$$a_1 = -0.819 \quad b_1 = 0.181$$

On obtient ainsi la fonction de transfert:

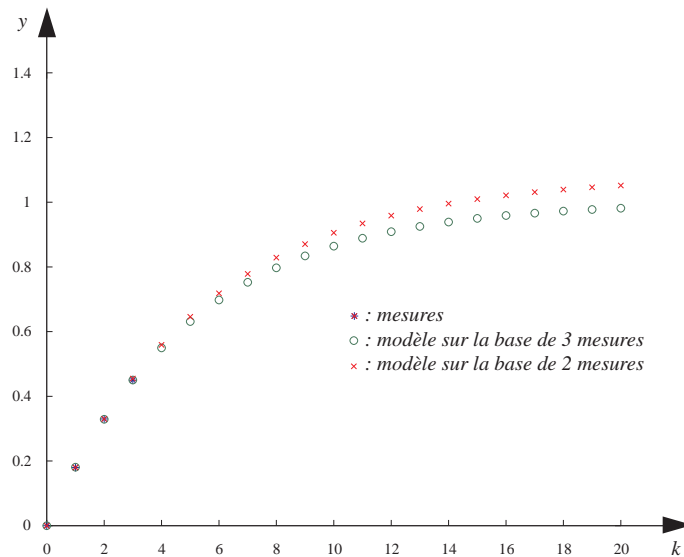
$$\hat{G}(z) = \frac{0.181z^{-1}}{1 - 0.819z^{-1}}$$

c) Avec seulement 2 mesures: En minimisant l'erreur de sortie ou d'équation, on obtient chaque fois:

$$a_1 = -0.8333 \quad b_1 = 0.18$$

ou

$$\hat{G}(z) = \frac{0.18z^{-1}}{1 - 0.8333z^{-1}}$$



### Exercice 3

Enoncé: Soit le modèle linéaire:

$$y_m(k) = a + bk$$

et les mesures  $y(1), y(2), \dots, y(N)$ .

a) Identifier  $a$  et  $b$  par la méthode des moindres carrés en utilisant les notations suivantes:

$$S_0 = \sum_{k=1}^N y(k) \quad S_1 = \sum_{k=1}^N ky(k)$$

b) Répéter le point précédant pour le cas du modèle:

$$y_m(k) = a$$

c) Supposer que le paramètre  $a$  est d'abord identifié comme indiqué sous point b). Identifier ensuite le paramètre  $b$  du modèle:

$$y_m(k) - \hat{a} = bk$$

et comparer avec les résultats du point a).

**Solution:**

**a) Identification de  $a$  et  $b$  par moindres carrés**

Critère quadratique pour minimiser l'erreur de sortie  $y(k) - y_m(k)$ :

$$J = \sum_{k=1}^N (y(k) - (a + bk))^2$$

On obtiendra l'estimation  $\hat{\theta} = [\hat{a} \ \hat{b}]^T$  comme suit:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial a} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = -2 \sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{a} - \hat{b}k) = 0$$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial b} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = -2 \sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{a} - \hat{b}k)k = 0$$

ou

$$\sum_{k=1}^N y(k) - \hat{a} \sum_{k=1}^N 1 - \hat{b} \sum_{k=1}^N k = 0 \quad (3.198)$$

$$\sum_{k=1}^N y(k)k - \hat{a} \sum_{k=1}^N k - \hat{b} \sum_{k=1}^N k^2 = 0 \quad (3.199)$$

ou sous forme matricielle, en utilisant les définitions de  $S_0$  et  $S_1$ :

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum_{k=1}^N k \\ \sum_{k=1}^N k & \sum_{k=1}^N k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}$$

La résolution de cette équation pour  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  donne:

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{N \sum_{k=1}^N k^2 - \left( \sum_{k=1}^N k \right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N k^2 & - \sum_{k=1}^N k \\ - \sum_{k=1}^N k & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \end{bmatrix} \quad (3.200)$$

**b) Identification de  $a$  pour le modèle  $y_m(k) = a$**

De (3.198) avec  $\hat{b} = 0$ , on obtient:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{k=1}^N y(k)}{N} = \frac{S_0}{N} \quad (3.201)$$

qui est simplement la moyenne des mesures

c) **Identification de  $b$  avec  $a$  déjà estimé:** (3.201) dans (3.199) donne pour  $\hat{b}$  (noté ici  $\hat{b}_c$ ):

$$\hat{b}_c = \frac{S_1 - \frac{S_0}{N} \sum_{k=1}^N k}{\sum_{k=1}^N k^2}$$

$\hat{b}$  du point a), noté  $\hat{b}_a$ , est:

$$\hat{b}_a = \frac{S_1 - \frac{S_0}{N} \sum_{k=1}^N k}{\sum_{k=1}^N k^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{k=1}^N k \right)^2}$$

Ainsi, en comparant  $\hat{b}_a$  et  $\hat{b}_c$ , on obtient:

$$\hat{b}_a > \hat{b}_c$$

## Exercice 4

**Énoncé:** Les mesures suivantes ont été effectuées sur un processus dynamique initialement au repos dont la sortie  $y(k)$  est perturbée par un bruit de mesure  $n(k)$ :

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(k)$	0	1	-1	1	1	1	-1	-1	0	0	0
$y(k)$	0	1.1	-0.2	0.1	0.9	1	0.1	-1.1	-0.8	-0.1	0

a) Calculer  $b_0$  et  $b_1$  du modèle:

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1)$$

à l'aide de la méthode des moindres carrés.

b) Évaluer la séquence de bruit  $n(k)$ , sa valeur moyenne ainsi que son écarttype.

c) Répéter le point a) en utilisant successivement l'erreur de sortie et l'erreur d'équation.

**Solution:**

$$\varepsilon(k) = y(k) - [ u(k) \quad u(k-1) ] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = y(k) - \varphi^T(k) \theta \quad (3.202)$$

Pour  $N$  mesures:  $\mathcal{E} = Y - \Phi \theta$



Avec  $N = 10$ , on obtient pour  $k = 1, 2, \dots, 10$ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$Y = [ 1.1 \quad -0.2 \quad 0.1 \quad 0.9 \quad 1 \quad 0.1 \quad -1.1 \quad -0.8 \quad -0.1 \quad 0 ]^T$$

- a) Le modèle donné correspond à une structure FIR, laquelle donne un problème de moindres carrés linéaire dont la solution est:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y = \begin{bmatrix} 0.6143 \\ 0.5143 \end{bmatrix}$$

- b) Avec la structure FIR, on peut calculer l'erreur de prédiction pour le vecteur de paramètres estimé (résidus):

$$\varepsilon(k, \hat{\theta}) = y(k) - \varphi^T(k) \hat{\theta}$$

On obtient ainsi:

$$\varepsilon(k, \hat{\theta}) = [0.4857 \quad -0.1 \quad 0 \quad -0.2286 \quad -0.1286 \quad 0.2 \quad 0.0286 \quad -0.2587 \quad -0.1 \quad 0]^T$$

moyenne:  $-0.0129$ ; déviation standard:  $0.2225$

- c) Le modèle proposé correspond à une structure FIR. Le modèle (3.202) est tel que l'erreur de prédiction représente aussi bien une erreur de sortie qu'une erreur d'équation. Ainsi, les approches basées sur l'erreur de sortie (OE) et l'erreur d'équation (ARX) donneront le même résultat que celle basée sur la structure FIR.

## Exercice 5

**Enoncé:** Soit l'erreur de prédiction est donnée par l'équation aux différences suivante:

$$\varepsilon(k) = y(k) - [-ay(k-1) + bu(k-1)]$$

- Montrer que si l'entrée correspond à une rétroaction proportionnelle de la sortie, l'identification des paramètres  $a$  et  $b$  par la méthode des moindres carrés n'est pas possible.

**Solution:**

$$\varepsilon(k) = y(k) - [ -y(k-1) \quad u(k-1) ] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = y(k) - \varphi^T(k) \theta$$

Dans le cas d'une rétroaction proportionnelle de gain  $g$ ,  $u(k) = -gy(k)$ , et la matrice  $\Phi$  devient:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ -y(k-1) & -gy(k-1) \\ -y(k) & -gy(k) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$\Phi$  est donc *singulière* et  $\Phi^T \Phi$  non inversible. Dans un cas comme celui-là, il faut considérer le prédicteur suivant:

$$\hat{y}(k) = -ay(k-1) - bgy(k-1)$$

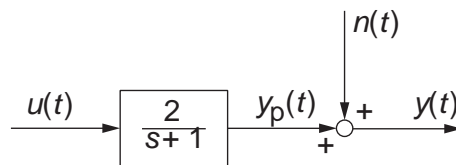
avec l'erreur de prédiction

$$\varepsilon(k) = y(k) + (a + bg)y(k-1)$$

et identifier le paramètre  $(a + bg)$ .

## Exercice 6

**Énoncé:** Soit le système dynamique à temps continu suivant:



- Calculer l'équation aux différences correspondant à la version échantillonnée de ce système.
- Supposons que le bruit  $n(t)$  corresponde à un bruit blanc. Indiquer l'expression de l'erreur de prédiction qui, une fois minimisée, permettra une *bonne* identification des paramètres du système.

**Solution:**

**a) Discrétisation** (basée sur la réponse impulsionnelle):

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{Y_P(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \Big|_{kT} \right\} \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{s(s+1)} \right] \Big|_{kT} \right\} = 2(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s+1)} \right] \Big|_{kT} \right\} \\ &= 2(1 - z^{-1}) \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})} = 2 \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{1 - e^{-T}z^{-1}} \end{aligned}$$

entrée 8, tableau C.2, annexe C

$$y_p(k) - e^{-T}y_p(k-1) = 2(1 - e^{-T})u(k-1)$$

*Choix de la période d'échantillonnage:*

$$T = \frac{\tau}{10} = 0.1 \Rightarrow y_p(k) + 0.905y_p(k-1) = 0.19u(k-1)$$

b) **Identification**  $n(t)$  et donc aussi  $n(k)$ : bruit blanc

$$n(k) = H_0(q^{-1})e(k)$$

avec  $H_0(q^{-1}) = 1$ . Comme le bruit n'est pas corrélé avec l'entrée, les structures OE et FIR sont appropriées. Cependant pour identifier le dénominateur du processus on ne peut utiliser que la structure OE. D'autre part, toutes les structures capables à identifier  $H_0(q^{-1}) = 1$  (ARMAX et BJ) peuvent être utilisées .

→ structures appropriées: OE, ARMAX et BJ

Structure OE:

$$\varepsilon(k) = y(k) - q^{-1} \frac{b_0}{1 + a_1 q^{-1}} u(k)$$

Structure ARMAX:

$$\varepsilon(k) = \frac{1 + a_1 q^{-1}}{1 + c_1 q^{-1}} [y(k) - q^{-1} \frac{b_0}{1 + a_1 q^{-1}} u(k)]$$

Structure BJ:

$$\varepsilon(k) = \frac{1 + d_1 q^{-1}}{1 + c_1 q^{-1}} [y(k) - q^{-1} \frac{b_0}{1 + a_1 q^{-1}} u(k)]$$

Pour cet exemple l'erreur de prédiction sera blanche pour toutes les structures. ARMAX identifie  $C \approx A$  et BJ identifie  $C \approx D$ .

## Exercice 7

**Enoncé:**

a) Formuler les critères quadratiques basés sur l'erreur de sortie et l'erreur d'équation pour identifier le système dynamique

$$G(z) = \frac{bz^{-3}}{1 + az^{-1}}$$

b) Montrer que le critère basé sur l'erreur de sortie génère un problème de régression non linéaire contrairement au critère basé sur l'erreur d'équation.

**Solution:**

a) *Erreur de sortie*

$$e_s(k) = y(k) - y_m(k) \quad (3.203)$$

$$y_m(k) = \frac{bq^{-3}}{1 + aq^{-1}} u(k) \Rightarrow y_m(k) = -ay_m(k-1) + bu(k-3) \quad (3.204)$$

$$\min_{a,b} \sum_{k=1}^N [y(k) + ay_m(k-1) - bu(k-3)]^2 \quad (3.205)$$

$$\text{avec: } y_m(0) = 0 \quad u(0) = u(-1) = u(-2) = 0$$

$y(k)$  et  $u(k)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , sont mesurés ou spécifiés et  $y_m(k)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , sont calculés à partir de  $u(k)$  selon (3.204).

*Erreur d'équation*

$$e_e(k) = y(k) + ay(k-1) - bu(k-3) \quad (3.206)$$

$$\min_{a,b} \sum_{k=1}^N [y(k) + ay_m(k-1) - bu(k-3)]^2 \quad (3.207)$$

avec:  $y(0) = 0 \quad u(0) = u(-1) = u(-2) = 0$

$y(k)$  et  $u(k)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , sont mesurés ou spécifiés.

### b) Régression non linéaire

L'erreur de sortie qui est minimisée dans le critère quadratique est *non linéaire* par rapport aux paramètres à identifier  $a$  et  $b$ . Par exemple:

Pour

$$\begin{aligned} k=1 \quad e_s(1) &= y(1) + ay_m(0) - bu(-2) \\ k=2 \quad e_s(2) &= y(2) + a[-ay_m(0) + bu(-2)] - bu(-1) \\ k=3 \quad e_s(3) &= y(3) + a\{-a[-ay_m(0) + bu(-2)] - bu(-1)\} - bu(0) \\ &\dots \end{aligned}$$

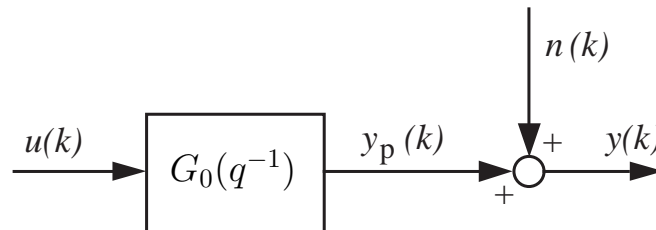
Au contraire, l'erreur d'équation est *linéaire* par rapport à  $a$  et  $b$ .

Pour

$$\begin{aligned} k=1 \quad e_e(1) &= y(1) + ay(0) - bu(-2) \\ k=2 \quad e_e(2) &= y(2) + ay(1) - bu(-1) \\ k=3 \quad e_e(3) &= y(3) + y(2) - bu(0) \\ &\dots \end{aligned}$$

## Exercice 8

**Énoncé:** On souhaite identifier le système dynamique  $G_0(q^{-1}) = q^{-1} \frac{b_0^0}{1 + a_1^0 q^{-1}}$  sur la base de mesures entrée-sortie.



Est-il possible d'identifier correctement (c'est-à-dire *sans biais*) les paramètres  $a_1^0$  et  $b_0^0$  avec les méthodes ARX (erreur d'équation) et OE (erreur de sortie) pour les deux cas suivants:

1.  $n(k) = e(k)$
2.  $n(k) = e(k) + c_1^0 e(k-1)$

où  $e(k)$  représente un bruit blanc de moyenne nulle.

**Solution:** Comme  $n(k)$  est un bruit blanc non corrélé avec l'entrée, la structure OE peut conduire à une estimation non biaisée des paramètres dans les deux cas si  $G_0$  appartient à l'ensemble des modèles candidats  $G(q^{-1})$ . Par contre, comme le bruit ne peut pas être représenté comme un bruit blanc filtré par  $1/A_0(q^{-1})$ , la structure ARX donne une estimation biaisée. Dans un cas très particulier, où  $c_1^0 = a_1^0$ , la structure ARX arrive à identifier correctement les paramètres du modèle.



## Annexe A

# TRANSFORMATION DE FOURIER

### A.1 SÉRIE DE FOURIER POUR SIGNAUX ANALOGIQUES PÉRIODIQUES

Un signal temporel analogique de période  $\theta$  peut s'exprimer sous la forme d'une **série de Fourier** (donnée ici sous forme exponentielle):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\theta} \quad (\text{A.1})$$

avec

$$c_k = \frac{1}{\theta} \int_{t_0}^{t_0+\theta} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad t_0 \text{ quelconque} \quad (\text{A.2})$$

Un signal analogique *périodique* possède donc un spectre de fréquences apériodique *discret* comme illustré à la figure A.1.

*Quelle est la forme trigonométrique des équations (A.1) et (A.2)?*

#### A.1.1 Exemple

Calculons la série de Fourier pour le signal périodique donné à la figure A.2.

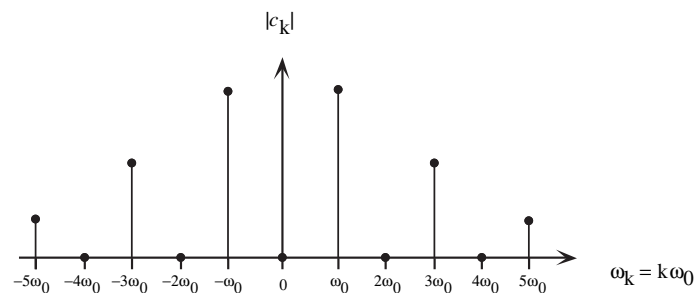


FIG. A.1 – Spectre d'amplitude d'un signal analogique périodique.

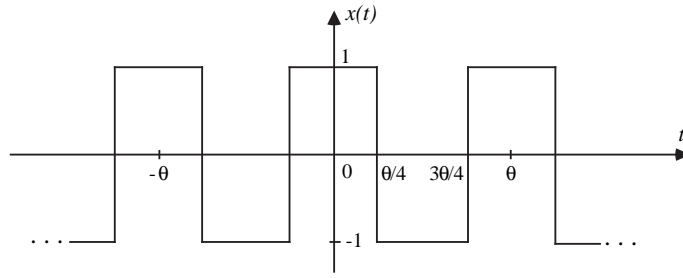


FIG. A.2 – Signal périodique rectangulaire.

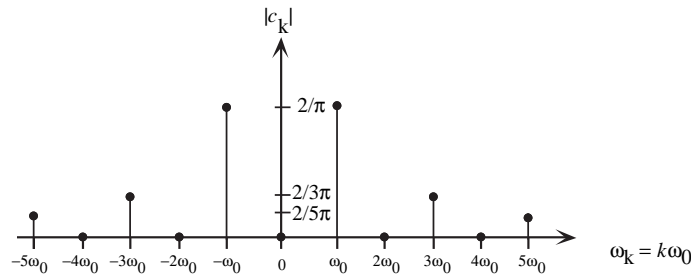


FIG. A.3 – Spectre d'amplitude du signal périodique de la figure A.2.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\theta}$$

avec:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{\theta} \left[ \int_0^{\theta/4} 1 e^{-jk\omega_0 t} dt + \int_{\theta/4}^{3\theta/4} (-1) e^{-jk\omega_0 t} dt + \int_{3\theta/4}^{\theta} 1 e^{-jk\omega_0 t} dt \right] \\ &= \frac{1}{\theta} \left( -\frac{1}{jk\omega_0} \right) \left[ e^{-jk\omega_0 t} \Big|_0^{\theta/4} + e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{\theta/4}^{3\theta/4} + e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{3\theta/4}^{\theta} \right] \\ &= -\frac{1}{jk2\pi} \left[ e^{-jk\pi/2} - 1 - e^{-jk3\pi/2} + e^{-jk\pi/2} + e^{-jk2\pi} - e^{-jk3\pi/2} \right] \\ &= -\frac{1}{jk2\pi} \left[ 2e^{-jk\pi/2} - 2e^{-jk3\pi/2} + e^{-jk2\pi} - 1 \right] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ -\frac{2}{jk\pi} e^{-jk\pi/2} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{2}{k\pi} & \text{pour } k = \pm 1, \pm 5, \pm 9, \dots \\ -\frac{2}{k\pi} & \text{pour } k = \pm 3, \pm 7, \pm 11, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Le spectre d'amplitude correspondant est donné à la figure A.3:



## A.2 TRANSFORMATION DE FOURIER POUR SIGNAUX ANALOGIQUES APÉRIODIQUES

Pour un signal analogique *apériodique* ( $\theta \rightarrow, \theta_0 \rightarrow 0$ ), le spectre de fréquences est apériodique et *continu*. La sommation de la série de Fourier est remplacée par une intégrale. On parle alors de **transformation de Fourier**.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{transformée de Fourier inverse de } X(\omega) \quad (\text{A.3})$$

(équation de synthèse)

avec

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{transformée de Fourier de } x(t) \quad (\text{A.4})$$

(équation d'analyse)

A partir de (A.3) et (A.4) on peut écrire:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$$

### A.2.1 Remarque

Il est possible de déplacer le terme constant  $1/2\pi$  à l'intérieur des crochets, ce qui reviendrait à modifier d'un facteur  $2\pi$  les définitions de la transformée et de la transformée inverse. Cependant, les expressions (A.3) et (A.4) sont celles utilisées le plus couramment.

### A.2.2 Exemple

1.  $X(\omega) = \delta(\omega)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi}$$

Il s'ensuit:  $FA = 2\pi A\delta(\omega)$

2.  $x(t) = \delta(t)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1$$

3.  $x(t) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{-j\omega} [e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}] \\ &= \frac{2A}{\omega} \left[ \frac{-e^{-j\omega T/2} + e^{j\omega T/2}}{2j} \right] = \frac{2A}{\omega} \sin \left( \omega \frac{T}{2} \right) = AT \frac{\sin \left( \omega \frac{T}{2} \right)}{\omega \frac{T}{2}} \\ &= AT \operatorname{sinc} \left( \omega \frac{T}{2} \right) \end{aligned}$$

TAB. A.1 – Paires  $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ .

$x(t)$	$X(\omega)$	Comments
1. $A\delta(t - t_0)$	$Ae^{-j\omega t_0}$	Impulse at $t = t_0$
2. $A$	$2\pi A\delta(\omega)$	Constant
3. $A\gamma(t)$	$A\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$	Step function
4. $Ae^{-at}\gamma(t)$	$\frac{A}{j\omega + a}$	Valid only for $a > 0$
5. $Ae^{-a t }$	$\frac{2Aa}{a^2 + (j\omega)^2}$	Valid only for $a > 0$
6. $Ae^{-at} \cos \omega_0 t \gamma(t)$	$\frac{A(j\omega + a)}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$	Valid only for $a > 0$
7. $Ae^{-at} \sin \omega_0 t \gamma(t)$	$\frac{A\omega_0}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$	Valid only for $a > 0$
8. $Ate^{-at}\gamma(t)$	$\frac{A}{(j\omega + a)^2}$	Valid only for $a > 0$
9. $Ae^{j\omega_0 t}$	$2A\pi\delta(\omega - \omega_0)$	
10. $A \cos \omega_0 t$	$A\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$	
11. $A \sin \omega_0 t$	$jA\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$	
12. $AP_T(t)$	$AT \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$	Rectangular pulse of height $A$ for $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$
13. $\frac{AW}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{2}\right)$	$AP_W(\omega)$	Sinc function

$$4. X(\omega) = \begin{cases} A & -\frac{W}{2} \leq \omega < \frac{W}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W/2}^{W/2} Ae^{j\omega t} d\omega = \frac{AW}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{2}\right)$$

Ces paires  $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$  sont représentées à la figure A.4. D'autres paires sont données dans le tableau A.1. On remarque qu'il est possible de calculer la transformée de Fourier d'un signal *périodique* (cf. entrées 10 et 11). Dans ce cas, la nature discrète des spectres est représentée par des impulsions de Dirac.

Le tableau A.2 liste les propriétés principales de la transformation de Fourier.

5. Utilisation de la propriété de dualité  $F\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega)$

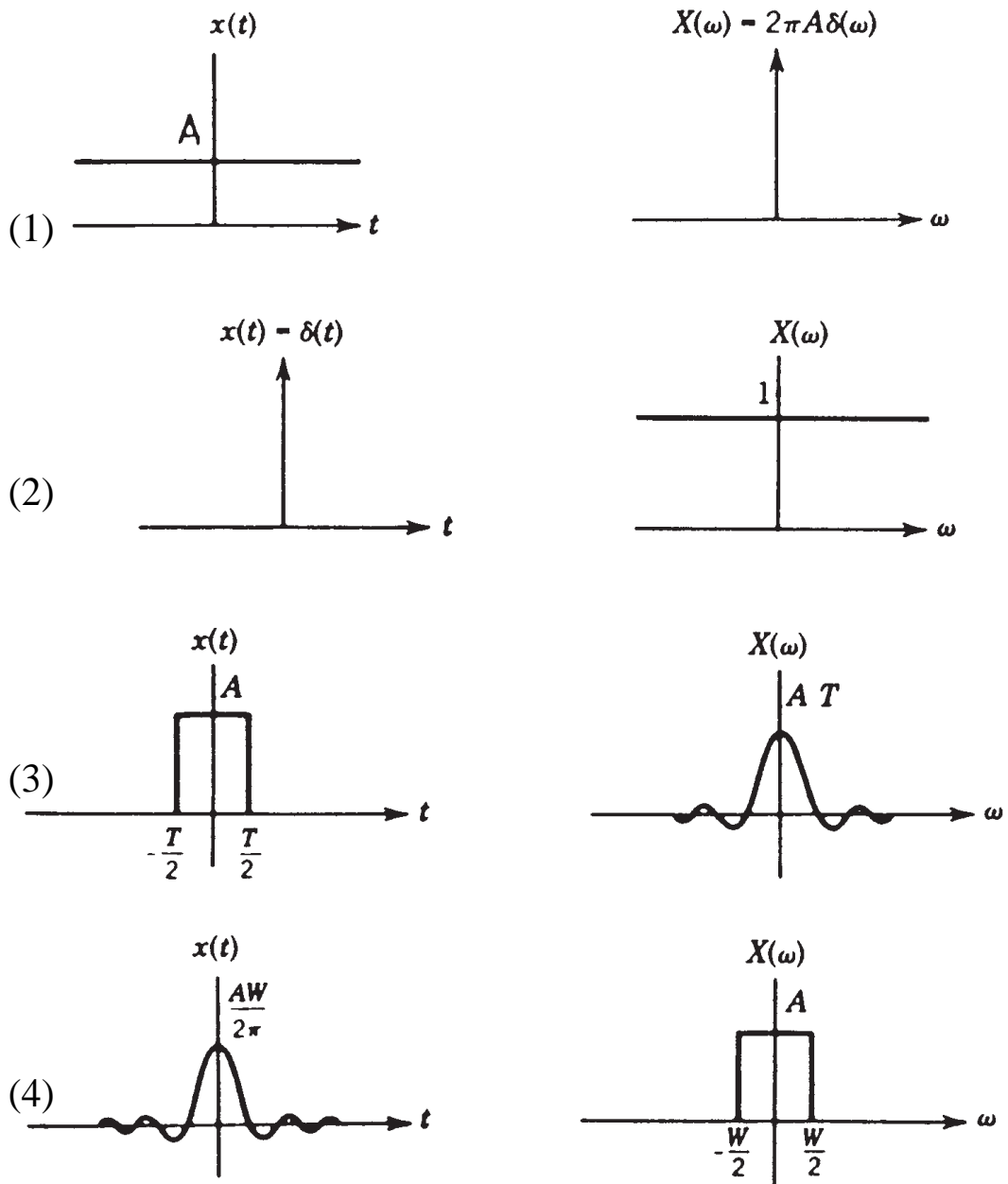


FIG. A.4 – Quelques paires  $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ .

TAB. A.2 – Propriétés de la transformation de Fourier.

1. Linéarité	$F[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
2. Dualité	$F[X(t)] = 2\pi x(-\omega)$
3. Dérivation temporelle	$F[s^n x(t)] = (j\omega)^n X(\omega)$
4. Intégration temporelle	$F\left[\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$
5. Dérivation fréquentielle	$F[tx(t)] = \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
6. Intégration fréquentielle	$F\left[\frac{1}{t}x(t)\right] = j \int_{\omega}^{\infty} X(u)du$
7. Mise à l'échelle	$F[x(at)] = \frac{1}{ a }X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
8. Convolution temporelle	$F\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right] = X(\omega)Y(\omega)$
9. Corrélation	$F\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-t)y(\tau)d\tau\right] = X(-\omega)Y(\omega)$
10. Convolution fréquentielle	$F[x(t)y(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(u)Y(\omega-u)du$
11. Décalage temporel	$F[x(t-t_0)] = \exp(-j\omega t_0)X(\omega)$
12. Décalage fréquentiel	$X(\omega-\omega_0) = F[\exp(j\omega_0 t)X(t)]$

De l'exemple 2 ci-dessus:  $x(t) = \delta(t) \leftrightarrow X(\omega) = 1$

on obtient:  $F\{1\} = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

qui a déjà été calculé à l'exemple 1.

### A.3 SÉRIE DE FOURIER POUR SIGNAUX NUMÉRIQUES PÉRIODIQUES

Un signal numérique de période  $N$  peut s'exprimer sous la forme d'une **série de Fourier**:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jkn\Omega_0} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (\text{A.5})$$

avec

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-jkn\Omega_0} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{A.6})$$

et

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Un signal numérique *périodique* possède donc un spectre de fréquences *périodique discret*. De plus,  $c_k$  est *périodique* du fait de la périodicité du terme exponentiel en fonction de  $k\Omega_0$  (signal *numérique*). Puisque  $c_k$  est périodique de période  $N$ , l'équation de synthèse (A.5) se limite à sommer les termes pour  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

#### A.3.1 Exemple

Calculons le spectre de fréquence du signal numérique périodique

$$x_n = \cos(n\Omega_0) \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Pour  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , on a:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(n\Omega_0) e^{-jkn\Omega_0} = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-jn\Omega_0} + e^{jn\Omega_0}) e^{-jkn\Omega_0} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j(k+1)n\Omega_0} + e^{-j(k-1)n\Omega_0}) \end{aligned}$$

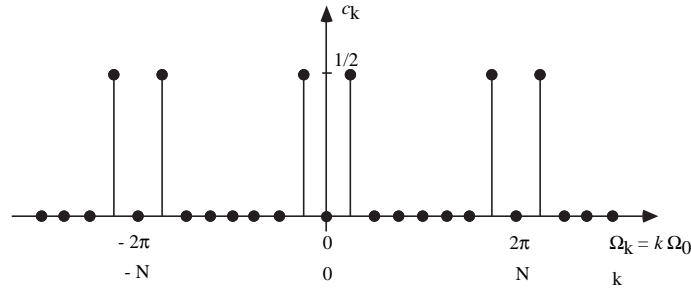


FIG. A.5 – Coefficients de la série de Fourier pour  $\cos(n\Omega_0)$ .

Pour

$$\begin{aligned}
 k = 0 & \quad c_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(n\Omega_0)1 = 0 \\
 k = 1 & \quad c_1 = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2n\Omega_0} + \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} 1 = \frac{1}{2} \\
 k = 2, \dots, N-2 & \quad c_k = 0 \\
 k = N-1 & \quad c_{N-1} = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} 1 + \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(N-2)n\Omega_0} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Le spectre de fréquences est donné à la figure A.5.

## A.4 TRANSFORMATION DE FOURIER POUR SIGNAUX NUMÉRIQUES APÉRIODIQUES

Un signal numérique *apériodique* possède un spectre de fréquences périodique *continu* qui peut être évalué à l'aide de la **transformation de Fourier pour signaux numériques** suivante:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (\text{équation de synthèse}) \quad (\text{A.7})$$

avec

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\Omega n} \quad (\text{équation d'analyse}) \quad (\text{A.8})$$

et

$$\Omega = \omega T = \frac{2\pi\omega}{\omega_s}$$

### A.4.1 Exemple

Soit le signal numérique donné à la figure A.6.

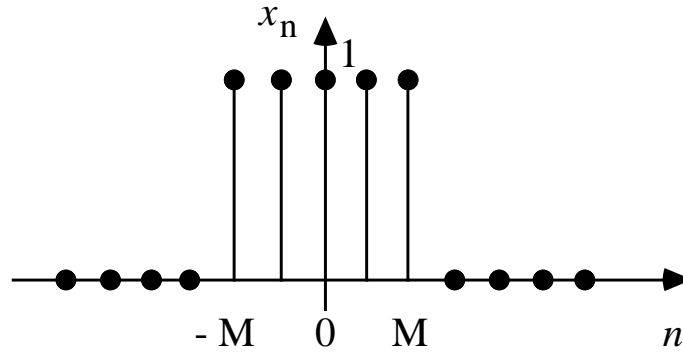


FIG. A.6 – Signal numérique apériodique.

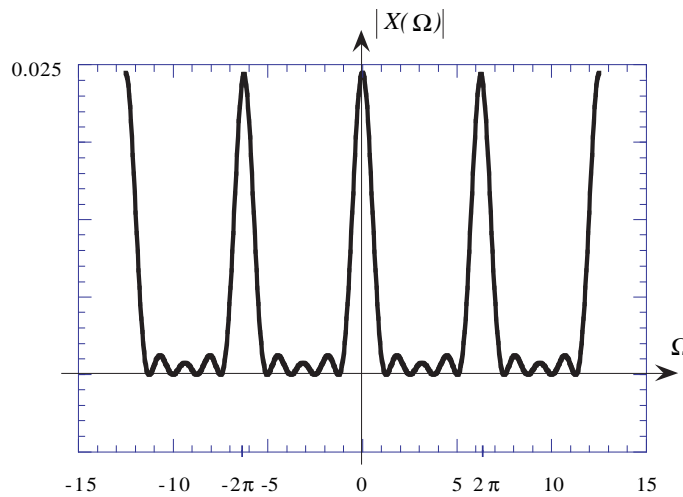


FIG. A.7 – Spectre d'amplitude du signal numérique apériodique de la figure A.6.

La transformée de Fourier pour signaux numériques apériodiques donne:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-M}^M 1e^{-j\Omega n} = e^{j\Omega M} [1 + e^{-j\Omega} + \dots + e^{-j\Omega 2M}] = e^{j\Omega M} \frac{e^{-j\Omega(2M+1)} - 1}{e^{-j\Omega} - 1}$$

Le spectre d'amplitude continu et *périodique* (période  $2\pi$  due à la périodicité du terme exponentiel par rapport à  $\Omega$  dans le cas d'un signal *numérique*) est représenté à la figure A.7 pour  $M = 2$ . Du fait de la périodicité de  $X(\Omega)$ , l'équation de synthèse (A.7) ne considère qu'une seule période du domaine fréquentiel,  $\Omega \in [0, 2\pi]$ .

## A.5 SPECTRE D'UN SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ

Un signal *échantillonné* possède un spectre de fréquences *périodique* qui peut être calculé à partir du spectre du signal analogique correspondant.

Soient  $x(t)$  un signal temporel analogique et

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \quad (\text{A.9})$$

sa version échantillonnée exprimée en fonction de la variable continue  $t$ . On peut aussi écrire:

$$x_e(t) = x(t) \cdot p(t) \quad (\text{A.10})$$

où

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

représente un train d'impulsion de Dirac aux instants d'échantillonnage.

Comme le signal  $p(t)$  est périodique de période  $T$ , on peut l'écrire à l'aide de l'équation (A.1):

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_s t} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

avec

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt \quad \left( t_0 = -\frac{T}{2} \right) \\ &= \frac{1}{T} e^{-jk\omega_s t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Il s'ensuit:

$$p(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}$$

et en considérant l'entrée 9 de la table A.1:

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

On peut exprimer  $X_e(\omega)$  en fonction de  $X(\omega)$  à partir de la relation (A.10):

$$X_e(\omega) = F\{x_e(t)\} = F\{x(t)p(t)\}$$

En utilisant la propriété 10 de la table A.2, on obtient:

$$\begin{aligned} X_e(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s - \nu) d\nu \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \delta(\omega - k\omega_s - \nu) d\nu \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$



TAB. A.3 – Types de signaux et spectres correspondants.

SIGNAL	périodique		apériodique	
<i>analogique</i>	SPECTRE discret <i>apériodique</i>	A1.1	SPECTRE continu <i>apériodique</i>	A1.2
<i>numérique</i>	SPECTRE discret <i>périodique</i>	A2.1	SPECTRE continu <i>périodique</i>	A2.2

Cette dernière relation lie les transformées de Fourier d'un signal temporel analogique et de sa version échantillonnée. On remarque que  $X_e(\omega)$  est périodique de période  $\omega_s = 2\pi/T$ , et que son amplitude est multipliée par le facteur  $1/T$  par rapport à  $X(\omega)$  (cf. fig. 2.21).

## A.6 TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRÈTE

L'analyse fréquentielle présentée dans les sections précédentes a montré les caractéristiques suivantes:

- un signal analogique possède un spectre apériodique, alors qu'un signal numérique est caractérisé par un spectre périodique,
- un signal périodique possède un spectre discret, alors qu'un signal apériodique a un spectre continu.

Les quatre cas possibles sont résumés dans le tableau A.3.

La transformation de Fourier discrète permettra de faire correspondre à un signal numérique, pas nécessairement périodique, un spectre de fréquences *discret*. Cela sera d'une grande utilité pour travailler avec l'ordinateur car le signal et son spectre seront tous deux numériques.

Considérons un signal temporel analogique  $x(t)$  et sa transformée de Fourier  $X(\omega)$  comme indiqué à la figure A.8(a). Afin de simplifier les représentations graphiques, nous avons choisi  $x(t)$  limité dans le temps et  $X(\omega)$  de bande fréquentielle limitée. Ceci est tout à fait hypothétique, car un signal limité dans le temps aura une transformée de Fourier à bande fréquentielle illimitée et, inversement, un signal à bande fréquentielle limitée ne sera pas limité dans le temps (cf. fig. A.4). Les limites temporelle et fréquentielle sont des conditions mutuellement exclusives (cf. également la propriété 7 du tableau A.2).

Formons le signal périodique  $x_p(t)$  qui est une extension de  $x(t)$  avec une période  $\theta$ . L'équation (A.2) nous permet de calculer un spectre de fréquences discret (fig.

A.8(b)) où les coefficients de la série de Fourier sont donnés par:

$$c_k = \frac{X(\omega_k)}{\theta}$$

avec

$$\omega_k = \omega_s \frac{k}{N} = k\omega_0 \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{A.12})$$

et

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\theta}$$

Si nous échantillons le signal  $x(t)$  avec une période  $T$  pour obtenir  $x_e(t)$  ou  $x(nT)$ , l'équation A.11 donne la situation décrite à la figure A.8(c).

Une comparaison des illustrations A.8(b) et A.8(c) met bien en évidence la propriété de dualité de la transformation de Fourier.

Le calcul de  $X(\Omega)$  à partir de l'équation (A.8) présente deux difficultés. D'une part, la somme contient une infinité de termes. En pratique, on considère un nombre fini  $N$  de termes, notés de 0 à  $N-1$ . D'autre part, la pulsation  $\omega$  est continue: pour des raisons de calcul sur ordinateur, on préférerait disposer d'une représentation discrète. On considère donc uniquement  $N$  points fréquentiels espacés uniformément sur une période de  $X(\Omega)$ .

A l'aide de ces deux approximations, l'équation (A.8) donne:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi K n/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{A.13})$$

qui est la **transformée de Fourier discrète** pour  $N$  valeurs du signal numérique  $x_n$ .

Puisque  $X(k)$  est forcé à être *discret*,  $x_n$  doit être *périodique*, et nous avons la situation indiquée à la figure A.8(d).

L'équation de synthèse correspondante devient:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi K n/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{A.14})$$

### A.6.1 Remarque

Les équations (A.14) et (A.13) sont, à un facteur  $N$  près, identiques à celles de la série de Fourier pour signaux numériques périodiques (équations A.5 et A.6). La remarque de la section A.2 s'applique également ici. Il est usuel de définir la série de Fourier pour signaux numériques périodiques selon les équations (A.5) et (A.6) et la transformée de Fourier discrète selon les équations (A.13) et (A.14).

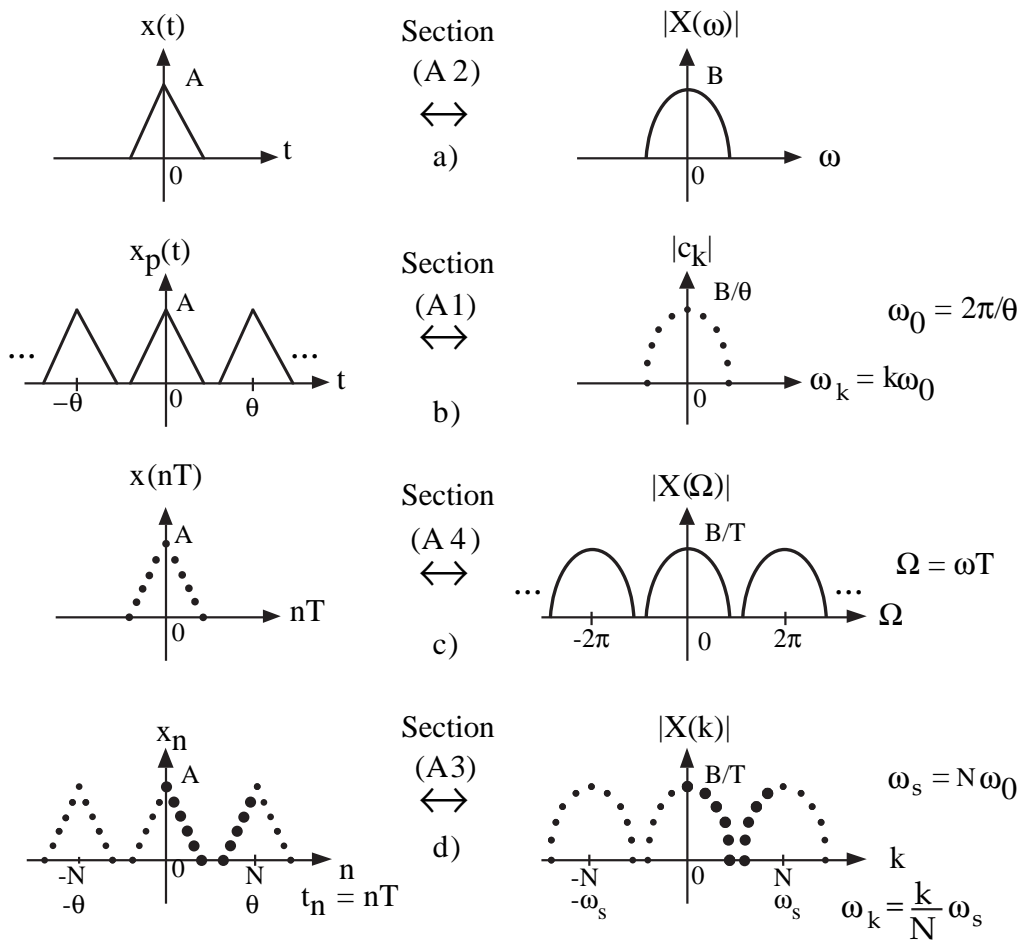


FIG. A.8 – Illustration de la paire  $x_n \leftrightarrow X(k)$  à partir de la paire  $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ . Les points en gras indiquent les valeurs utilisées dans la transformation de Fourier discrète (A.13) et son inverse (A.14).

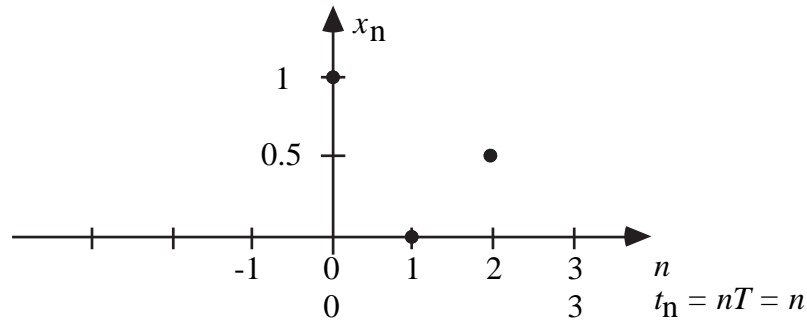
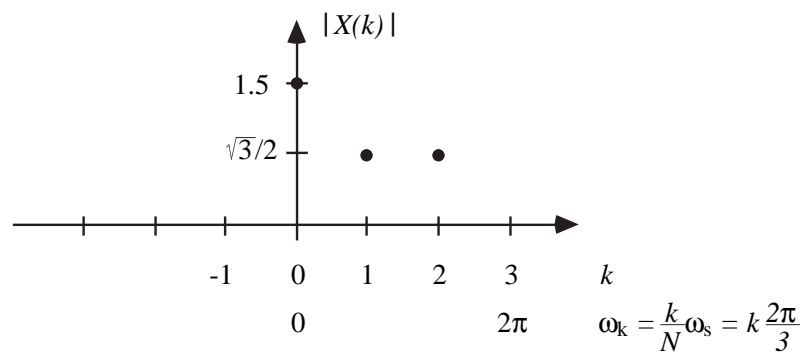
### A.6.2 Exemples

1. Soit le signal numérique formé des 3 points donnés à la figure A.9 (période d'échantillonnage  $T = 1$ ).

Sa transformée de Fourier discrète se calcule ainsi:

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^2 x_n e^{-j2\pi kn/3} \quad k = 0, 1, 2 \\
 &= 1e^0 + 0 + 0.5e^{-j4\pi k/3} = \begin{cases} 1.5 & \text{pour } k = 0 \\ 0.75 + \frac{\sqrt{3}}{4}j & k = 1 \\ 0.75 - \frac{\sqrt{3}}{4}j & k = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La représentation fréquentielle de  $x_n$  est donnée à la figure A.10.

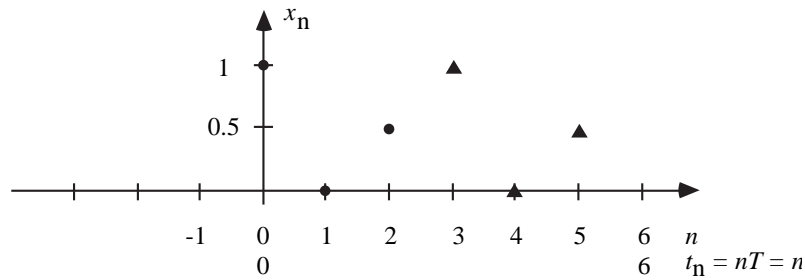
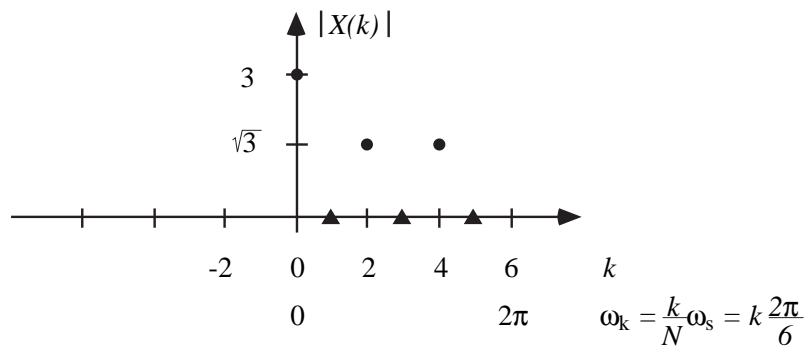
FIG. A.9 – Signal numérique ( $N = 3, T = 1$ ).FIG. A.10 – Spectre d'amplitude du signal de la figure A.9 ( $N = 3, T = 1$ ).

Il est possible de reconstruire  $x_n$  à partir de  $X(k)$ :

$$\begin{aligned}
 x_n &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 X(k) e^{j2\pi kn/3} \quad n = 0, 1, 2 \\
 &= \frac{1}{3} \left[ 1.5e^0 + \left( 0.75 + \frac{\sqrt{3}}{4}j \right) e^{j2\pi n/3} + \left( 0.75 + \frac{\sqrt{3}}{4}j \right) e^{j4\pi n/3} \right] \\
 &= \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & n = 1 \\ 0.5 & n = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

2. Le signal  $x_n$  est étendu périodiquement de façon à avoir 6 points ( $N = 6, T = 1$ , fig. A.11).

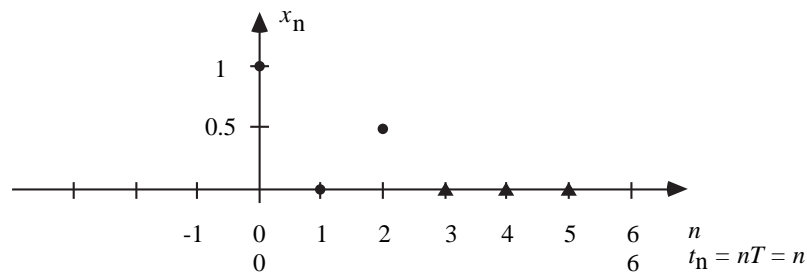
La transformée de Fourier discrète devient (fig. A.12):

FIG. A.11 – Signal numérique avec 2 périodes ( $N = 6, T = 1$ ).FIG. A.12 – Spectre d'amplitude du signal de la figure A.11 ( $N = 6, T = 1$ ).

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^5 x_n e^{-j2\pi kn/6} \quad k = 0, 1, \dots, 5 \\
 &= 1e^0 + 0.5e^{-j4\pi k/6} + 1e^{-j6\pi k/6} + 0 + 0.5e^{-j10\pi k/6} \\
 &= 1 + 0.5e^{-j2\pi k/3} + e^{-j\pi k} + 0.5e^{-j5\pi k/3} \\
 &= \begin{cases} 3 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & k = 1 \\ 1.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}j & k = 2 \\ 0 & k = 3 \\ 1.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}j & k = 4 \\ 0 & k = 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le fait d'avoir doublé le nombre de points (les trois points initiaux répétés) donne un spectre deux fois plus fort (il ne s'agit ici que d'une mise à l'échelle). Cependant, le contenu spectral est le même car les trois valeurs spectrales additionnelles sont nulles. Cela n'étonne pas puisque la transformée de Fourier discrète se calcule avec l'hypothèse implicite que le signal se continue périodiquement (cf. fig. A.8(d)). Par conséquent, le fait d'étendre le signal périodiquement ne modifie pas l'information spectrale obtenue à l'aide de la transformation de Fourier discrète.

3. Considérons maintenant une extension non périodique du signal numérique de la figure A.9 ( $N = 6, T = 1$ , fig. A.13).

FIG. A.13 – Signal numérique ( $N = 6, T = 1$ ).

La transformée de Fourier discrète devient dans ce cas-ci:

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^5 x_n e^{-j2\pi kn/6} \quad k = 0, 1, \dots, 5 \\
 &= 1e^0 + 0 + 0.5e^{-j4\pi k/6} + 0 + 0 + 0 \\
 &= 1 + 0.5e^{-j2\pi k/3} \\
 &= \begin{cases} 1.5 & \text{pour } k = 0 \\ 0.75 - \frac{\sqrt{3}}{4}j & k = 1 \\ 0.75 + \frac{\sqrt{3}}{4}j & k = 2 \\ 1.5 & k = 3 \\ 0.75 - \frac{\sqrt{3}}{4}j & k = 4 \\ 0.75 + \frac{\sqrt{3}}{4}j & k = 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Comme il fallait s'y attendre, le contenu spectral du cas 3 (fig. A.14) est différent de celui des cas 1 et 2 (fig. A.10 et A.12). Cependant, les points pour  $k = 0, 2$ , et 4 correspondent exactement à ceux de la figure A.10. Les valeurs spectrales additionnelles ajoutent de l'information intermédiaire.

Pour une séquence de  $N$  points temporels, l'ajout de  $pN$  zéros, avec  $p$  entier, permet d'interpoler des valeurs spectrales dans l'intervalle fréquentiel  $[0, 2\pi]$ . Cela permet de lisser l'apparence du spectre, mais n'ajoute aucune information utile.

4. Considérons finalement le signal de la figure A.15 que l'on peut considérer comme une version échantillonnée plus rapidement du cas 1 ( $T = 0.5, N = 6$ ).

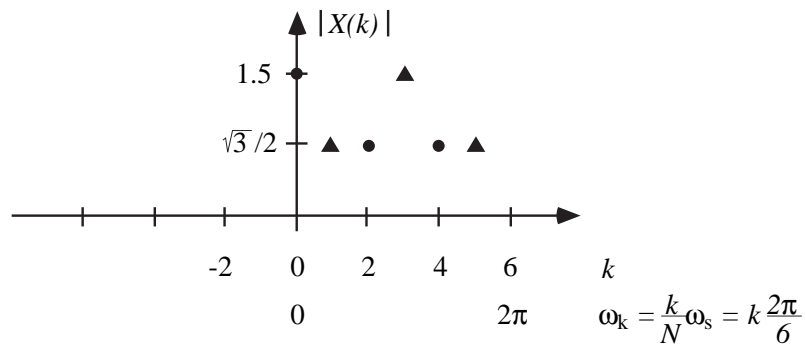


FIG. A.14 – Spectre d'amplitude du signal numérique de la figure A.13 ( $N = 6, T = 1$ )

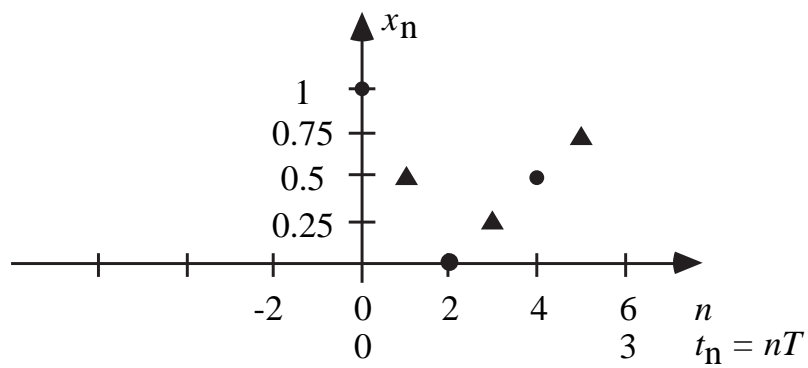


FIG. A.15 – Signal numérique ( $N = 6, T = 0.5$ ).

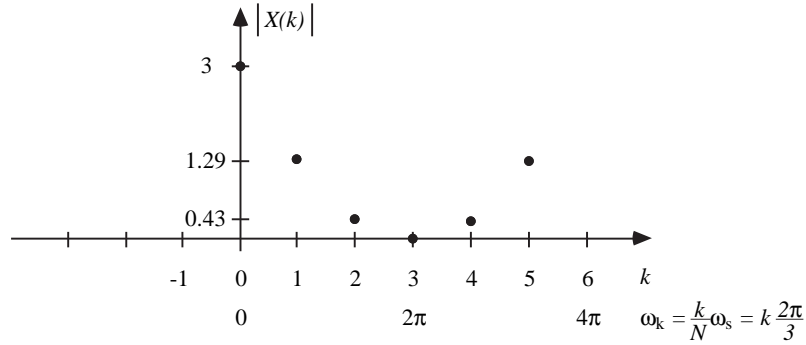


FIG. A.16 – Spectre d'amplitude du signal numérique de la figure A.15 ( $N = 6, T = 0.5$ ).

Sa transformée de Fourier donne (fig. A.16):

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^5 x_n e^{-j2\pi kn/6} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\
 &= 1e^0 + 0.5e^{-j\pi k/3} + 0 + 0.25e^{-j\pi k} + 0.5e^{-j4\pi k/3} + 0.75e^{-j5\pi k/3} \\
 &= \begin{cases} 3 & \text{pour } k = 0 \\ 1.12 + 0.65j & k = 1 \\ 0.37 - 0.22j & k = 2 \\ 0 & k = 3 \\ 0.37 + 0.22j & k = 4 \\ 1.12 - 0.65j & k = 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le fait d'avoir échantillonné plus rapidement a augmenté l'information du signal numérique et, de ce fait, modifié son contenu spectral. La plage fréquentielle a doublé par rapport aux cas précédents.

## A.7 TRANSFORMATION DE FOURIER RAPIDE (FFT)

Il s'agit là d'une méthode performante servant à minimiser le nombre d'opérations nécessaires à l'évaluation de la transformée de Fourier discrète d'un signal numérique  $x_n$ .

La transformée de Fourier discrète du signal  $x_n$  et la transformée inverse correspondante sont données par les équations (A.13) et (A.14). La relation entre la pulsation discrète  $\omega_k$  et le compteur de pulsations discrètes  $k$  est, quant à elle, donnée par l'équation (A.12).

Du point de vue numérique, le calcul de la transformée de Fourier discrète consiste à calculer la suite  $\{X(0), X(1), \dots, X(N-1)\}$  à partir de la suite  $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ . L'équation (A.13) peut s'écrire:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n z^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{avec } z = e^{-j2\pi/N} \quad (\text{A.15})$$



ou sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^0 & & \dots & & z^0 \\ z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z^0 & z^{N-1} & z^{2(N-1)} & \dots & z^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

ou

$$X = Zx \quad (\text{A.17})$$

Si les coefficients  $z^{kn}$  ont été précalculés, le calcul de la suite  $\{X(0), X(1), \dots, X(N-1)\}$  à partir de la suite  $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$  demande à première vue  $N^2$  flops (1 flop = 1 multiplication complexe plus une addition complexe).

Cependant, si  $N = 2^p$ , on démontre que l'on peut effectuer ces calculs avec seulement  $Np$  multiplications. L'idée est présentée ci-dessous.

Exprimons (A.15) comme suit (avec la notation  $\bar{N} = N/2$ ):

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{\bar{N}-1} x_n z^{kn} + \sum_{n=\bar{N}}^{N-1} x_n z^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ &= \sum_{n=0}^{\bar{N}-1} [x_n + x_{n+\bar{N}} z^{k\bar{N}}] z^{kn} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Notons que:

$$z^{k\bar{N}} = e^{-j\pi k} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k \text{ pair} \\ -1 & \text{pour } k \text{ impair} \end{cases}$$

Avec la notation  $\bar{z} = z^2 = e^{-j(2\pi/\bar{N})}$ , (A.18) donne:

- Pour  $k$  pair,  $k = 2q = 0, 2, \dots, N-2$  ( $q = 0, 1, \dots, \bar{N}-1$ )

$$X(2q) = \sum_{n=0}^{\bar{N}-1} [x_n + x_{n+\bar{N}}] (\bar{z})^{qn} = \sum_{n=0}^{\bar{N}-1} x_n^+ (\bar{z})^{qn} = X^+(q) \quad (\text{A.19})$$

où  $x_n^+ = x_n + x_{n+\bar{N}}$  ( $n = 0, 1, \dots, \bar{N}-1$ )

- Pour  $k$  impair,  $k = 2q+1 = 1, 3, \dots, N-1$  ( $q = 0, 1, \dots, \bar{N}-1$ )

$$X(2q+1) = \sum_{n=0}^{\bar{N}-1} [x_n - x_{n+\bar{N}}] z^n (\bar{z})^{qn} = \sum_{n=0}^{\bar{N}-1} x_n^- (\bar{z})^{qn} = X^-(q) \quad (\text{A.20})$$

où  $x_n^- = x_n - x_{n+\bar{N}}$  ( $n = 0, 1, \dots, \bar{N}-1$ )

Ainsi, la transformée de Fourier discrète d'un signal de longueur  $N$  se laisse calculer à partir des transformées de Fourier discrètes de deux signaux de longueur  $N/2$ . Ces dernières se laissent à leur tour calculer à partir de séquences de longueur

$N/4$ . Et, pour  $N = 2^p$ , ce processus récursif peut se répéter jusqu'à  $\overline{N} - 1$ . On démontre alors que le nombre de flops pour évaluer la transformée de Fourier discrète d'un signal de longueur  $N$  exige approximativement  $N \log_2 N = Np$  flops.

Il s'ensuit une réduction considérable du nombre d'opérations lorsque  $N$  est grand. Par exemple, si  $N = 1024$  ( $p = 10$ ), on a :

$$\begin{aligned} N^2 &\cong 10^6 && \text{multiplications} \\ Np &\cong 10^4 && \text{multiplications} \end{aligned}$$

ce qui correspond à une réduction du nombre d'opérations d'un facteur 100.

Si la matrice  $Z$  est régulière, ( A.17) donne :

$$x = Z^{-1}X$$

ce qui permet de calculer la suite  $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$  à partir de la suite  $\{X(0), X(1), \dots, X(N-1)\}$  (inverse de la transformation de Fourier rapide). De nombreux programmes, facilement accessibles, implantent la transformation de Fourier rapide (par exemple, FFT et IFFT sont les commandes MATLAB pour la transformation de Fourier rapide et son inverse).

Grâce à la transformation de Fourier rapide, les méthodes fréquentielles représentent un outil d'identification très puissant, surtout dans les cas où

- les signaux d'entrée et de sortie sont de longue durée,
- un grand nombre de points (512 ou plus) est disponible.

## Annexe B

# MATRICE PSEUDO-INVERSE

### B.1 DÉFINITIONS

Toute matrice réelle  $A$  de dimension  $p \times q$  possède une **matrice pseudoinverse** unique de dimension  $q \times p$ , dénotée  $A^+$ , et définie par les quatre équations suivantes:

$$A^+AA^+ = A^+ \quad (\text{B.1})$$

$$AA^+A = A \quad (\text{B.2})$$

$$(AA^+)^T = AA^+ \quad (\text{B.3})$$

$$(A^+A)^T = A^+A \quad (\text{B.4})$$

Les conditions (B.3) et (B.4) indiquent simplement que les matrices  $AA^+$  et  $A^+A$  sont symétriques. La matrice  $A^+$  est également appelée la *matrice inverse généralisée* de  $A$ . Il convient de considérer quatre cas pour exprimer  $A^+$ :

1. Si la matrice  $A$  est carrée et régulière, alors

$$A^+ = A^{-1} \quad (\text{B.5})$$

satisfait (B.1)-(B.4).

2. Si  $A$  est rectangulaire avec des colonnes linéairement indépendantes ( $p > q = \text{rang}(A)$ ), alors  $(A^T A)$  est carrée et régulière et

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \quad (\text{B.6})$$

satisfait (B.1)-(B.4).

3. Si  $A$  est rectangulaire avec des lignes linéairement indépendantes ( $\text{rang}(A) = p < q$ ), alors  $(AA^T)$  est carrée et régulière et

$$A^+ = A^T (AA^T)^{-1} \quad (\text{B.7})$$

satisfait (B.1)-(B.4).

4. Si  $A$  n'a pas toutes ses lignes ou toutes ses colonnes linéairement indépendantes ( $\text{rang}(A) < \min(p, q)$ ), il n'existe pas d'expression simple pour  $A^+$ . Cependant, il est possible d'utiliser certaines factorisations de matrices, telle que la décomposition en valeurs singulières (cf. annexe B.4), pour exprimer et calculer  $A^+$ .

## B.2 PROPRIÉTÉS

$$1. \quad (A^+)^+ = A \quad (\text{B.8})$$

$$2. \quad (A^T)^+ = (A^+)^T \quad (\text{B.9})$$

$$3. \quad (\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+ = \frac{1}{\lambda} A^+ \quad \lambda \text{ scalaire, } \lambda \neq 0 \quad (\text{B.10})$$

$$4. \quad (A^T A)^+ = A^+ (A^T)^+ = A^+ (A^+)^T \quad (\text{B.11})$$

$$(A A^T)^+ = (A^T)^+ A^+ = (A^+)^T A^+ \quad (\text{B.12})$$

Mais en général:  $(AB)^+ \neq B^+ A^+$

5. Pour  $A$  de dimension  $p \times r$  et  $B$  de dimension  $r \times q$ , on a:

$$(AB)^+ = B^T (B B^T)^{-1} (A^T A)^{-1} A^T \quad (\text{B.13})$$

Si de plus  $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = r$ , alors

$$(AB)^+ = B^+ A^+ \quad (\text{B.14})$$

## B.3 RÉOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES LINÉAIRES

Soit le système de  $p$  équations algébriques à  $q$  inconnues:

$$y = Ax \quad (\text{B.15})$$

$$(p \times q)$$

Une des quatre situations suivantes peut se présenter:

1.  $p = q = \text{rang}(A)$

Il y a autant d'équations (indépendantes) que d'inconnues. Dans ce cas, la solution de l'équation (B.15) donne:

$$x = A^+ y = A^{-1} y \quad (\text{B.16})$$

2.  $p > q = \text{rang}(A)$

Il y a plus d'équations que d'inconnues et le système d'équations est inconsistent (sur-déterminé). Dans ce cas, on peut utiliser la pseudo-inverse de  $A$  pour calculer la solution moindres carrées  $\hat{x}$ , c'est-à-dire celle qui minimise la norme euclidienne  $\|y - Ax\|$ :

$$\hat{x} = A^+ y = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (\text{B.17})$$



Le rang de la matrice  $A$  est donné par le nombre de valeurs singulières non nulles.  
La matrice pseudo-inverse de  $A$  se calcule aisément comme suit:

$$A^+ = V\Sigma^+U^T \quad (\text{B.24})$$

où  $\Sigma^+$ , la matrice pseudo-inverse de  $\Sigma$ , est obtenue en inversant chaque élément non nul de  $\Sigma^T$ .

A partir de (B.23), on peut aussi écrire:

$$A^+ = V_1\Sigma_1^+U_1^T \quad (\text{B.25})$$

## Annexe C

# TRANSFORMATIONS DE LAPLACE ET EN Z

Propriétés de la transformation de Laplace.

Name	Theorem
Derivative	$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$
$n$ th-order derivative	$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0^+) - \dots - f^{n+1}(0^+)$
Integral	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$
Shifting	$\mathcal{L}[f(t - t_0)u(t - t_0)] = e^{-t_0s} F(s)$
Initial value	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Final value	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
Frequency shift	$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$
Convolution integral	$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau)d\tau$ $= \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau$

TAB. C.1 – Propriétés de la transformation en  $z$ .

	$x(t)$ or $x(k)$	$\mathcal{Z}[x(t)]$ or $\mathcal{Z}[x(k)]$
1.	$ax(t)$	$aX(z)$
2.	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
3.	$x(t + T)$ or $x(k + 1)$	$zX(z) - zx(0)$
4.	$x(t + 2T)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(T)$
5.	$x(k + 2)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$
6.	$x(t + kT)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(T) - \dots - zx(kT - T)$
7.	$x(t - kT)$	$z^{-k}X(z)$
8.	$x(n + k)$	$z^kX(z) - z^kx(0) - z^{k-1}x(1) - \dots - zx(k - 1)$
9.	$x(n - k)$	$z^{-k}X(z)$
10.	$tx(t)$	$-Tz \frac{d}{dz}X(z)$
11.	$kx(k)$	$-z \frac{d}{dz}X(z)$
12.	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
13.	$e^{-ak}x(k)$	$X(ze^a)$
14.	$a^kx(k)$	$X(z/a)$
15.	$ka^kx(k)$	$-z \frac{d}{dz}X\left(\frac{z}{a}\right)$
16.	$x(0)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ if the limit exists
17.	$x(\infty)$	$\lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})X(z)]$ if $(1 - z^{-1})X(z)$ is analytic on and outside the unit circle
18.	$\nabla x(k) = x(k) - x(k - 1)$	$(1 - z^{-1})X(z)$
19.	$\Delta x(k) = x(k + 1) - x(k)$	$(z - 1)X(z) - zx(0)$
20.	$\sum_{k=0}^n x(k)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$
21.	$\frac{\partial}{\partial a}x(t, a)$	$\frac{\partial}{\partial a}X(z, a)$
22.	$k^m x(k)$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^m X(z)$
23.	$\sum_{k=0}^n x(kT)y(nT - kT)$	$X(z)Y(z)$
24.	$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)$	$X(1)$



TAB. C.2 – Paires  $x(t) \leftrightarrow X(s)$  et  $x(k) \leftrightarrow X(z)$ .

	$x(s)$	$x(t)$	$x(kT)$ or $x(k)$	$X(z)$
1.	—	—	$\delta(k)$	1
2.	—	—	$\delta(n - k)$	$z^{-k}$
3.	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
4.	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$e^{-akT}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
5.	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$kT$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
6.	$\frac{2}{s^3}$	$t^2$	$(kT)^2$	$\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
7.	$\frac{6}{s^4}$	$t^3$	$(kT)^3$	$\frac{T^3z^{-1}(1+4z^{-1}+2z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$
8.	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
9.	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
10.	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$kTe^{-akT}$	$\frac{Tze^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
11.	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
12.	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$t^2e^{-at}$	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2e^{-aT}(1+e^{-aT}z^{-1})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$
13.	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at - 1 + e^{-at}$	$akT - 1 + e^{-akT}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$
14.	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\sin \omega kT$	$\frac{z^{-1} \sin \omega T}{1-2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$
15.	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	$\cos \omega kT$	$\frac{1-z^{-1} \cos \omega T}{1-2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}}$
16.	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$e^{-akT} \sin \omega kT$	$\frac{e^{-aT}z^{-1} \sin \omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$
17.	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$e^{-akT} \cos \omega kT$	$\frac{1-e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$
18.			$a^k$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
19.			$a^{k-1}$ $k = 1, 2, \dots$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
20.			$ka^{k-1}$	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
21.			$k^2a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$
22.			$k^3a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1+4az^{-1}+a^2z^{-2})}{(1-az^{-1})^4}$
23.			$k^4a^{k-1}$	$\frac{z^{-1}(1+11az^{-1}+11a^2z^{-2}+a^3z^{-3})}{(1-az^{-1})^5}$
24.			$a^k \cos k\pi$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$

$x(t) = 0$  pour  $t < 0$ ;  $x(kT) = x(k) = 0$  pour  $k < 0$ ; par défaut  $k = 0, 1, 2, \dots$



---

## BIBLIOGRAPHIE

- K.J. ASTRÖM et B. WITTENMARK , *Adaptive Control*, Addison-Wesley, 1989.
- G.E.P. BOX , G.M. JENKINS et G.C. REINSEL , *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Prentice-Hall, 1994.
- C.T. CHEN , *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- F. DE COULON , *Théorie et traitement des signaux*, Traité d'Electricité Vol. VI, Presses polytechniques romandes, 1984.
- J.M. FLAUS , *La régulation industrielle*, Hermès, 1994.
- G.F. FRANKLIN et J.D. POWEL l, *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, 1980.
- D. GRAUPE , *Identification of Systems*, Krieger, 1976.
- R. ISERMANN , K.H. LACHMANN et D. MATKO , *Adaptive Control Systems*, Prentice-Hall, 1992.
- R.G. JACQUOT , *Modern Digital Control Systems*, Marcel Dekker, 1981.
- R. JOHANSSON , *System Modeling and Identification*, Prentice-Hall, 1993.
- J.N. JUANG , *Applied System Identification*, Prentice-Hall, 1994.
- H. KWAKERNAAK et R. SIVAN , *Modern Signal and Systems*, Prentice-Hall, 1991.
- I.D. LANDAU , *Identification et commande des systèmes*, Hermès, 1993.
- I.D. LANDAU , R. LOZANO et M. M'SAAD , *Adaptive Control*, Springer-Verlag, 1998.
- P. DE LARMINAT et Y. THOMAS , *Automatique des systèmes linéaires. 2. Identification*, Flammarion Sciences, 1977.
- J.R. LEIGH , *Modelling and Simulation*, IEE Topics in Control Series 1, Peter Pergrinus Ltd, 1983.
- L. LJUNG , *System Identification: Theory for the User*, Prentice-Hall, 1987.
- L. LJUNG et T. GLAD , *Modeling of Dynamic Systems*, Prentice-Hall, 1994.
- L. LJUNG et T. SÖDERSTRÖM , *Theory and Practice of Recursive Identification*, MIT Press, 1987.
- M. O'FLYNN and E. MORIARTY , *Linear Systems. Time Domain and Transform Analysis*, John Wiley, 1987.
- K. OGATA , *Discrete-Time Control Systems*, Prentice-Hall, 1987.
- R. PETIT , *L'outil mathématique*, Masson, 1991.

- J. RICHALET , *Pratique de l'identification*, Hermès, 1998.
- J. RICHALET , A. RAULT et R. POULIQUEN , *Identification des processus par la méthode du modèle*, Gordon & Breach, 1971.
- J. SCHOUKENS et R. PINTELOON , *Identification of Linear Systems*, Pergamon Press, 1991.
- B. SHAHIAN et M. HASSUL , *Control System Design Using MATLAB*, Prentice-Hall, 1993.
- N.K. SINHA , *Linear Systems*, John Wiley, 1991.
- N.K. SINHA et B. KUSZTA , *Modeling and Identification of Dynamic Systems*, Van Nostrand Reinhold, 1983.
- T. SÖDERSTRÖM et P. STOICA , *System Identification*, Prentice-Hall, 1989.
- P. STOICA et R. MOSES , *Introduction to Spectral Analysis*, Prentice-Hall, 1997.
- H. UNBEHAUEN , *Regelungstechnik I-III*, Vieweg, 1985.
- J. VAN DE VEGTE , *Feedback Control Systems*, Prentice-Hall, 1994.
- P.P.J. VAN DEN BOSCH , A.C. VAN DER KLAUW , *Modeling, Identification and Simulation of Dynamical Systems*, CRC Press, 1994.
- E. WALTER et L. PRONZATO , *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*, Masson, 1994.
- Y. ZHU et T. BACKX , *Identification of Multivariable Industrial Processes*, Springer-Verlag, 1993.